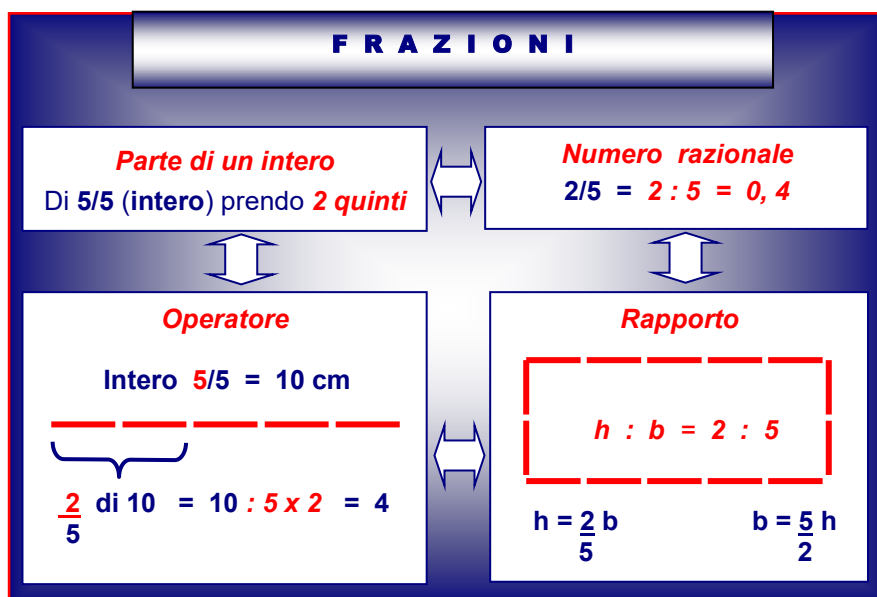


CAPIRE LE FRAZIONI



Il **concetto** di frazione, come evidenziato nello schema, si articola in **4 aspetti** diversi, ma strettamente **interconnessi**.

1 -La frazione come **parte di un intero** è costituita da una o più **unità frazionarie uguali** in cui si suddivide l'intero stesso.

Ad es. dell'intero suddiviso in **5 quinti** uguali si prendono **2 quinti**.

Il denominatore è espresso con la parola "**quinti**" per evidenziare il suo diverso **significato** e **la sua diversa funzione** rispetto al **numeratore** che invece serve a **quantificare** le unità frazionarie considerate.

2 - Dividendo il numeratore fratto il denominatore (diverso da zero) di una frazione, si ottiene come quoziente un **numero razionale**, che è il rapporto tra numeratore e denominatore, e si può scrivere sia come frazione sia come numero decimale, o anche intero se la frazione è apparente. Ad es. $2/5 = 2 \text{ diviso } 5 = 0,4$. Infatti **2** equivale a **20 decimi**, e 20 decimi **diviso 4** fanno **4 decimi**. Oppure $6/2 = 3 = 12/4$ ecc...

3 -La frazione è **un operatore**, che consente di calcolare il valore della frazione di una grandezza, **dividendo** il valore di tale grandezza diviso il **denominatore** e moltiplicando il **risultato per il numeratore**, nei problemi **diretti**; o viceversa, di calcolare il valore di una grandezza conoscendo il valore di una sua frazione, **dividendo** il valore di tale frazione **diviso il numeratore** e moltiplicando il risultato **per il denominatore**, nei problemi **inversi**. Questa è la regola codificata. Ritengo tuttavia che, in base al diverso **significato** dei due termini della frazione, si possa ragionare anche con la logica del 3 semplice diretto con i soli numeratori, ed il metodo della riduzione all'unità. (*Vedi FRAZIONE COME OPERATORE*)

4 -La frazione può anche indicare **un rapporto**. Ad es. l'**altezza** di un rettangolo sta alla sua **base** come **2 sta a 5**. Cioè $h : b = 2 : 5$.

Da cui $h = 2/5 b$, e cioè **l'altezza è 2 quinti della base**.

Ma quest'ultima formulazione si basa sui **2 precedenti concetti** di frazione. Infatti, se l'**altezza è 2 quinti della base**, questa, cioè la **base**, è intesa come l'**intero 5/5**, e l'**altezza** come una sua parte, cioè i suoi **2/5**. E' il primo concetto di frazione come parte di un intero.

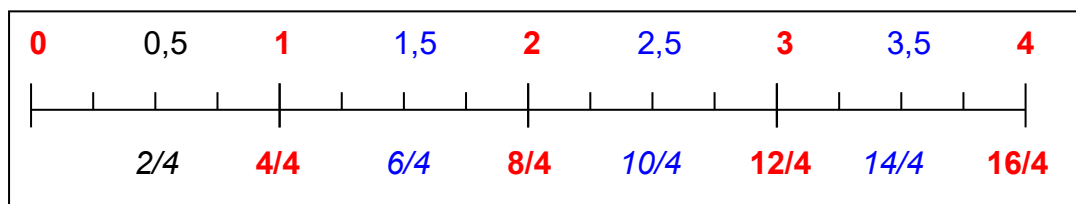
Inoltre **2/5** è anche l'**operatore** che, conoscendo l'intero, cioè la base, mi permette di calcolarne la frazione **2/5**, cioè l'altezza, con la **regola** codificata "**base diviso denominatore 5 per numeratore 2.**"

Se inverto il rapporto, ottengo $b = 5/2 h$, e cioè che la **base è 5/2 (frazione) dell'altezza 2/2 (intero)**, calcolando la base con la stessa regola "**altezza diviso denominatore 2 per numeratore 5.**" Tale regola, come già detto, codificata e valida formalmente, può essere meglio compresa se si ragiona anche con la logica del 3 semplice diretto. (vedi il prossimo paragrafo *FRAZIONE COME OPERATORE*)

FRAZIONI

PROPRIE <i>minori di 1 intero</i>	APPARENTI 1 o più interi	IMPROPRIE <i>apparenti + proprie</i> maggiori di 1 o più interi
1 quarto		
2 quarti		
3 quarti		
	4 quarti = 1 intero	
		5 quarti = 4/4 + 1/4
		6 quarti = 4/4 + 2/4
		7 quarti = 4/4 + 3/4
	8 quarti = 2 interi	
		9/4 = 4/4 + 4/4 + 1/4
		10/4 = <u>4/4 + 4/4</u> + 2/4
		11/4 = 4/4 + 4/4 + 3/4
	12 quarti = 3 interi	
		13/4 = 3 interi + 1/4
		14/4 = 3 interi + 2/4
		15/4 = 3 interi + 3/4
	16 quarti = 4 interi	
	<i>continua all'infinito</i>	<i>continua all'infinito</i>

Si può riempire qualche altra tabella con la stessa struttura, ma con serie di **frazioni diverse**: ad es. $1/5$, $2/5$, $3/5$ ecc.; $1/8$, $2/8$, $3/8$, ecc., per una piena comprensione delle 3 classi di frazioni, che sono anche efficacemente rappresentabili sulla **retta dei numeri**.



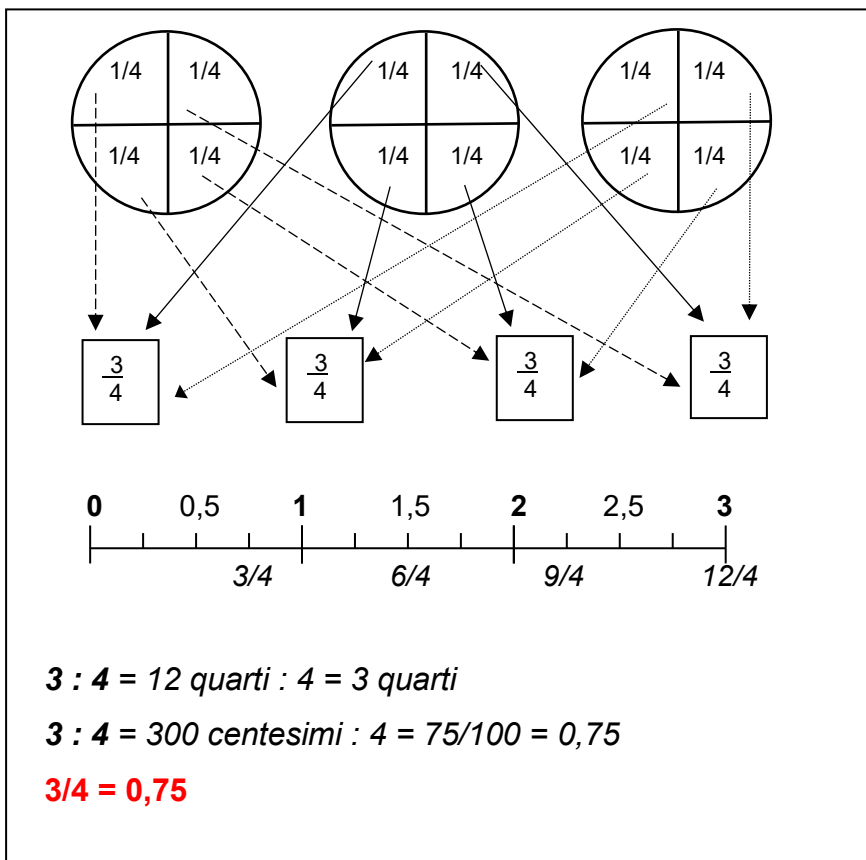
FRAZIONE COME NUMERO RAZIONALE

Voglio *dividere 3 euri tra 4 bambini.*

3 euri sono 12 quarti, che divisi in 4 parti uguali fanno **3 quarti.**

3 euri sono $300/100$, che, divisi in 4 parti uguali fanno $75/100$,

e cioè 0 euri, 7 decimi e 5 centesimi = **0,75**



Se devo dividere **3 diviso 4**, cioè un numero intero diviso un altro numero intero più grande, il risultato è un *numero razionale* (dal latino ratio, rapporto). Esso infatti esprime il **rapporto tra il numeratore e il denominatore** di una frazione, e può avere una parte decimale.

Ogni frazione è un numero razionale e si può esprimere come numero decimale, o intero se la frazione è apparente, ad es. $4/2 = 6/3 = 8/4 = 40/20 = 2$, dividendo il numeratore diviso (fratto) il denominatore (diverso da 0).

1/5 = 1 diviso, fratto 5

$$1 \text{ euro} : 5 = 100/100 : 5 = 20/100 = 2/10 = 0,2$$

2/5 = 2 diviso, fratto 5

$$2 \text{ euri} : 5 = 200/100 : 5 = 40/100 = 4/10 = 0,4$$

3/5 = 3 diviso, fratto 5

$$3 \text{ euri} : 5 = 300/100 : 5 = 60/100 = 6/10 = 0,6$$

4/5 = 4 diviso, fratto 5

$$4 \text{ euri} : 5 = 400/100 : 5 = 80/100 = 8/10 = 0,8$$

5/5 = 5 diviso, fratto 5

$$5 \text{ euri} : 5 = 500/100 : 5 = 100/100 = 10/10 = 1$$

Molte trasformazioni si possono visualizzare anche con i set delle frazioni, soprattutto con il set lucido, per i centesimi, e con il metro.

SET LINEARE DELLE FRAZIONI

Tavola sinottica. Si può stampare in più copie da dare a ciascun alunno per poterci lavorare, facendo molte equivalenze, anche solo oralmente, da soli o in coppia.

1 INTERO																							
1/2																							
1/4																							
1/16																							
1/8																							
1/24																							
1/12																							
1/6																							
1/18																							
1/9																							
1/3																							
1/15																							
1/5																							
1/10																							
1/20																							
1/4																							
1/2																							
1/8																							
1/24																							
1/3																							

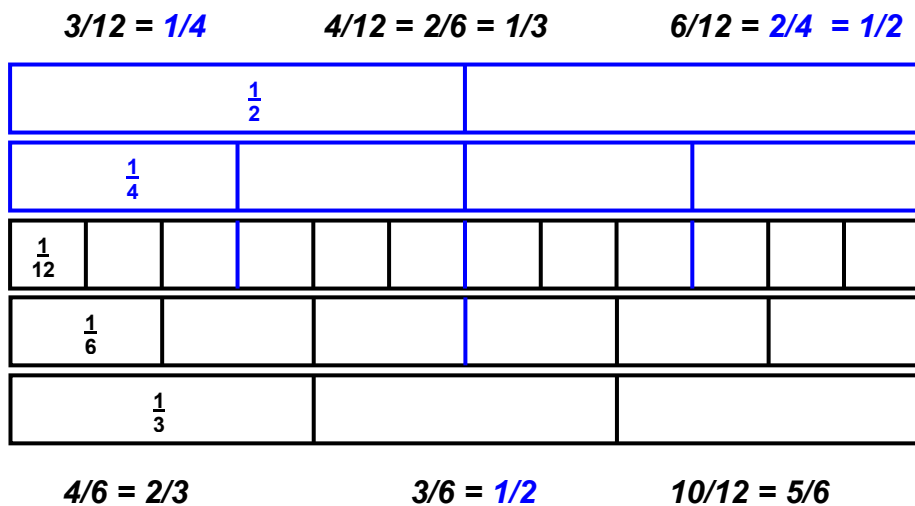
Equivalenze, addizioni e sottrazioni.

Il set **lineare** delle frazioni si compone di **strisce** uguali, frazionate dai **2/2** fino ai **30/30**, con linee di colore diverso per i denominatori primi di **2/2 (azzurro)**, **3/3 (nero)**, **5/5 (rosso)**, **7/7 (violetto)**, **11/11 (verde)**, **13/13 (arancio)**, e rispettivi **multipli**.

Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: ad es. il **rosso di 5** prevale sull'**azzurro di 2**, ecc.

Con il set lineare si possono visualizzare e capire facilmente **equivalenze e confronti, addizioni e sottrazioni** tra le frazioni, con la **riduzione** ai minimi termini e al minimo comune denominatore, ed altri concetti come la frazione complementare. All'inizio si può lavorare con le **singole strisce** separate, spostandole. Poi anche solo osservando le frazioni in **tavole sinottiche**, che si possono stampare per **ciascun alunno**.

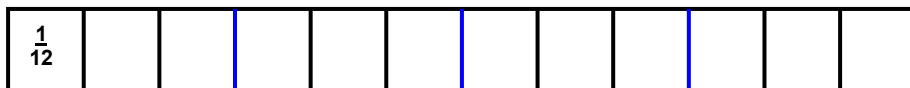
Equivalenza di frazioni e riduzione ai minimi termini.



Addizioni, sottrazioni e scomposizioni di frazioni con denominatore uguale

$$4/12 + 3/12 = 7/12$$

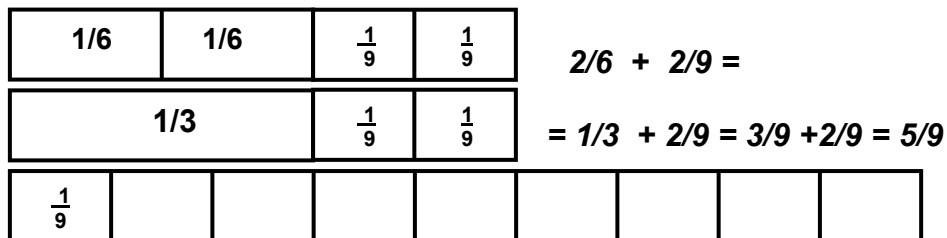
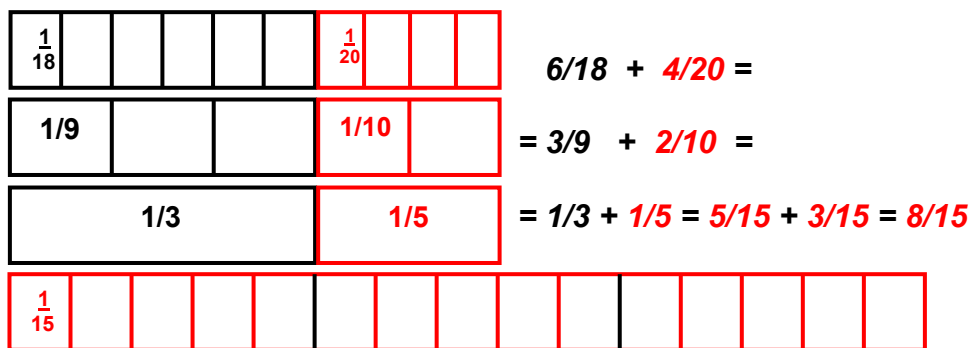
$$9/12 - 5/12 = 4/12 = 1/3$$



$$10/12 = 6/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 = \text{ecc...}$$

$$1 = 12/12 = 8/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 + 2/12 = 4/12 \text{ per 3 ecc.}$$

Addizioni e sottrazioni di frazioni con denominatore diverso e da ridurre ai minimi termini



Negli esempi fatti si capisce chiaramente perché bisogna ridurre ai **minimi termini** e al **minimo comune denominatore** frazioni con denominatore diverso per poterle addizionare o sottrarre.

Le operazioni e i concetti vengono facilmente compresi e consolidati mediante le **illustrazioni** e l'**applicazione** in esercizi pieni di **significato**. Sarà poi molto più facile capire le **regole generali** e l'uso dei **simboli astratti**, con numeri più grandi. Gli **esempi didattici** fatti sono ovviamente limitati e indicativi, per una eventuale utilizzazione critica da parte degli insegnanti, con gli opportuni adattamenti. Molti esempi si riferiscono soprattutto a obiettivi e contenuti della scuola secondaria di primo grado, ma ci sono anche utili spunti per un lavoro più semplice a partire dalla classe terza o quarta della scuola primaria.

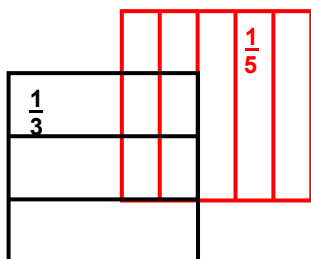
SET LUCIDO TRASPARENTE DELLE FRAZIONI

Le *matrici da stampare su lucidi trasparenti e ritagliare, e l'animazione al computer, anche del SET LINEARE, si trovano nel sito www.monachesi.it*

Il “*set lucido delle frazioni*” si compone di **quadrati lucidi trasparenti** uguali, frazionati o in un solo senso o in entrambi i sensi, dai $2/2$ fino ai $100/100$, con linee di **colore diverso** per i denominatori **primi** di $2/2$ (*azzurro*), $3/3$ (*nero*), $5/5$ (*rosso*), $7/7$ (*violetto*), e rispettivi **multipli**. Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: il *violetto di 7* prevale sul *rosso di 5* che prevale sul *nero di 3* che prevale sull' *azzurro di 2*.

Prodotto di frazioni

Il **prodotto** di frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 quadrati del set raffiguranti le 2 frazioni da moltiplicare, frazionati, uno in senso verticale e l'altro in senso orizzontale. Esempio:



$$\begin{aligned} 2/3 \times (\text{di}) 2/5 &= 4/15 \\ 2/5 \times (\text{di}) 2/3 &= 4/15 \end{aligned}$$

Se sovrappongo $3/3$ su $5/5$ visualizzo

$$3/3 \times 5/5 = 15/15$$

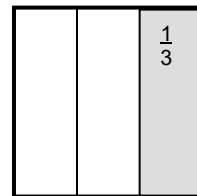
Problema (Prova nazionale INVALSI 2008 per l'esame di terza media)

Un padre e i suoi 4 figli si dividono la cifra vinta al lotto in questo modo: al padre spetta $\frac{1}{3}$ dell'intera somma, e il rimanente viene diviso in parti uguali tra i figli. Quale parte della somma spetta a ciascuno dei figli?

Soluzione

L'intera somma è **3 terzi**. Se il padre ne prende **1 terzo** ai 4 figli ne restano **2 terzi**.

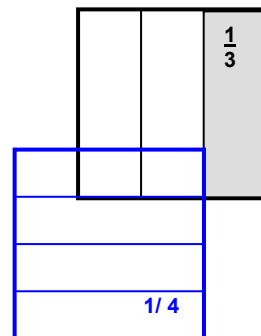
$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Poiché i figli sono 4, per trovare la parte che spetta a ciascuno di essi, si divide la parte rimasta, cioè **2 terzi**, in **4 parti** uguali, trovando **1 quarto di 2 terzi** che è uguale a **2 dodicesimi**,

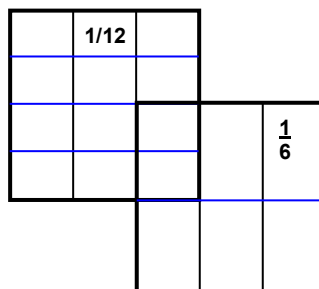
1 quarto di 2 terzi = 2 dodicesimi

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$



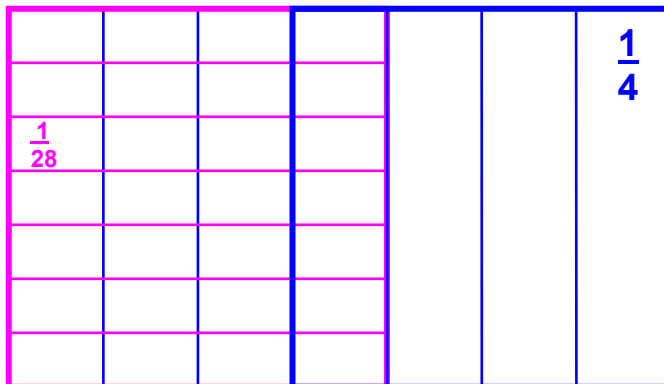
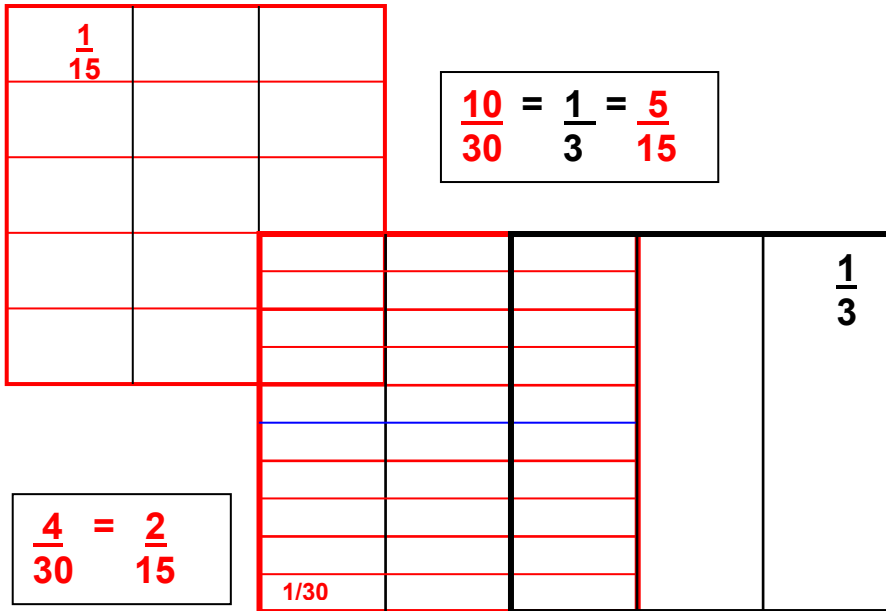
Il risultato **2 dodicesimi** è equivalente a **1 sesto**

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$



Equivalenza tra frazioni.

Si può visualizzare sovrapponendo 2 frazioni equivalenti raffigurate in 2 quadrati lucidi trasparenti del set lucido, frazionati in un solo senso e/o in entrambi i sensi.



$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

“Giocare a carte” con le frazioni

Con i quadrati del **set lucido concreto** si possono fare le equivalenze anche “*giocando a carte*”, tra 2 o più alunni, dividendosi in ugual numero i quadrati del set come “carte” da gioco. Poi ognuno gioca un quadrato e gli altri possono “*prenderne*” uno giocato se possono farci **un’equivalenza** con un quadrato che ha in mano: *es. 3/3 prende 18/18, ma non 5/5, ecc....L’intero*, equivalente a **tutte le carte**, le prende tutte e viene preso da tutte.

$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{3}$

Il quadrato **3 terzi (nero)** prende il quadrato **5 quindicesimi** e viceversa

Il **SET LUCIDO** è **brevettato** ed è stato pubblicato da:

1 -**RAFFAELLO** editrice, Monte San Vito, Ancona 1993.

2 -**BREVETTO** n.° 00232006 del 10 / 8 / '99.

3 -**RIVISTA** “L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate”, n° 3, maggio '07. Centro ricerche didattiche **UGO MORIN**.

“Calcolo mentale” con le frazioni

I due set, come altri sussidi, possono servire per “spiegare”, ma anche e soprattutto per farci lavorare gli alunni, guidati all’inizio dall’insegnante. Essi consentono di fare con facilità, anche solo **oralmente**, equivalenze e operazioni con le frazioni, e cioè il **calcolo mentale** con le frazioni. Tale attività sottende **altri concetti**, come quelli di **frazione complementare e propria, impropria e apparente**. Nel calcolo mentale con le frazioni essi vengono acquisiti in modo **implicito**, operando: sarà poi facile esplicitarli. Infatti si visualizzano sempre **l’intero** e le sue **unità frazionarie**, operando con esse, sia entro l’intero (es. $1/5 + 2/5 = 3/5$), sia oltre l’intero (es. $3/5 + 4/5 = 7/5 = 1 \text{ intero} + 2/5$), ecc. E lo si fa comprendendone pienamente il significato. Infatti si fanno addizioni e sottrazioni con i **numeratori** che quantificano le **unità frazionarie** uguali, facendo prima l’equivalenza se sono diverse, visualizzando uno stesso denominatore comune, capendo e consolidando così in modo intuitivo anche il loro rapporto con l’intero. Anche quando si fa ad es. **2 dm. + 5 cm.** si addizionano **20 centesimi + 5 centesimi di 1 metro**. E’ un lavoro semplice ed efficace, ma per lo più estraneo alla pratica didattica perché si ritiene che le **operazioni** con le **frazioni** si debbano fare in **forma simbolica scritta** alla scuola secondaria di primo grado, con le regole ben note, magari spiegandole con qualche esempio concreto. Il quale però, spesso non basta per una **comprensione più significativa e consolidata**, come invece avviene lavorando con i set concreti. Essi rendono facili, familiari e “simpatiche” le frazioni stesse, come dicevano i miei alunni, perché nel farci il **calcolo mentale oralmente** esse vengono visualizzate, capite e nominate spesso, facendoci “**confidenza**.”

Gli alunni possono lavorare con i set, prima con la **guida dell'insegnante**, poi anche in modo **autonomo, anche in coppia**, aiutandosi, inventando equivalenze e operazioni, anche **solo oralmente** ed in tempi limitati. L'importante è che facciano **lavorare il cervello, verbalizzando le equivalenze e le operazioni**.

L'insegnante può seguire gli alunni mentre lavorano, aiutando chi ne avesse bisogno, senza dover correggere tanti esercizi diversi, qualora fossero anche scritti. All'inizio si può lavorare un po' con le **frazioni più semplici** e con le **singole strisce** del set lineare o **i quadrati trasparenti del set lucido**. Poi anche soltanto osservando le frazioni nella **tavola sinottica** completa del set lineare, o in **più tavole sinottiche** ridotte, che si possono stampare per ciascun alunno.

Ovviamente i due set vanno usati in modo **graduale** secondo le capacità degli alunni, per riuscire poi più facilmente a lavorare anche con i simboli astratti capendone il significato, con un **processo di graduale astrazione**, che consentirà di capire senza più l'uso di sussidi concreti.

Consolidare concetti e conoscenze: esercizi significativi.

Con i set si può rappresentare la soluzione di **alcuni problemi**, come già visto, e si possono fare “**esercizi**” molto utili perché significativi, come dice Hans **Freudenthal**. Egli sostiene l'**utilità degli esercizi** che consentono di **approfondire e consolidare le intuizioni e la comprensione** dei concetti e dei ragionamenti nella soluzione dei problemi. *“Ma vi è un modo di fare esercizio (incluso anche lo studio a memoria), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al tesoro dell'intuizione: si tratta dell'esercizio accoppiato con l'apprendimento per intuizione.”* (*“Ripensando l'educazione matematica”*, pag. 150).

Michele Pellerey, su *“Orientamenti Pedagogici”*, n° 3/’85, *“Verso una nuova stagione per la scuola?”*, evidenzia l’importanza delle **conoscenze capite e consolidate**: *“La psicologia cognitivista ha rilevato il ruolo decisivo che gioca in tutto questo il quadro concettuale posseduto, l’insieme cioè dei fatti, delle idee, dei principi, dei procedimenti resi propri in maniera significativa e coerentemente compaginata. Per risolvere problemi, per fare ricerche, per leggere e capire, per seguire i ragionamenti, ecc.... Non basta essere intelligenti, si deve anche sapere, e sapere le cose in modo chiaro e pertinente.”*

Di solito la comprensione e l’apprendimento non avvengono con la modalità del *“tutto o niente”*, come spiega **Guido Petter**, ma richiedono **approfondimenti progressivi**. **Hans Aebli** infatti scrive: *“Le strutture mentali che il bambino costruisce col processo di elaborazione non hanno per nulla quella consistenza quasi concreta che Piaget ad esse attribuisce. (Ma anche Piaget parla di “decalages”, “scarti”, regressioni: n.d.a.). Appena in un processo appaiono fattori di maggiore difficoltà, l’operazione arretra a un livello strutturale più basso. Ciò dimostra quanto sia importante che i risultati di un processo di elaborazione vengano in qualche modo consolidati con adeguati esercizi e applicazioni.”*

FRAZIONE COME OPERATORE

La frazione è **un operatore** che consente di calcolare il valore della frazione di un intero dal valore noto (**problema diretto**), e viceversa, di calcolare il valore di un intero conoscendo il valore di una sua frazione (**problema inverso**). Ad es., con la frazione *3/5 come operatore* si possono risolvere i 2 problemi seguenti.

1 - Problemi diretti e inversi risolti applicando la regola

Problema diretto - Calcolare i *3/5* di 20.

La regola dice che si divide il valore 20 dell'intero **diviso** il **denominatore 5** e si **moltiplica** il risultato, 4, per il **numeratore 3**, ottenendo 12.

$$20 : 5 \text{ (denominatore)} = 4$$

$$4 \times 3 \text{ (numeratore)} = 12 \text{ (Valore dei } 3/5 \text{ di } 20)$$

Problema inverso - Il valore dei *3/5* di un intero è 12.
Calcolare il valore dell'intero.

La regola dice che si divide il valore 12 della frazione *3/5* **diviso** il **numeratore 3** e si **moltiplica** il risultato, 4, per il **denominatore 5**, ottenendo 20.

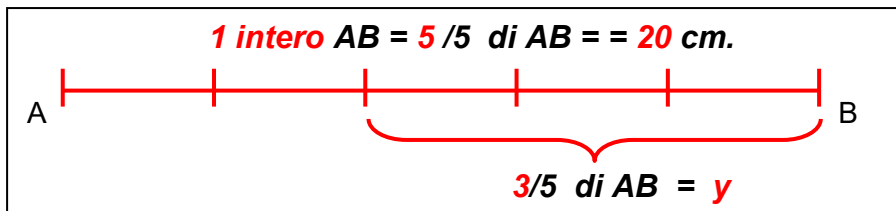
$$12 : 3 \text{ (numeratore)} = 4$$

$$4 \times 5 \text{ (denominatore)} = 20 \text{ (Valore dell'intero } 3/5)$$

2 - Problemi diretti e inversi risolti con la logica del 3 semplice diretto con i soli numeratori.

I problemi suddetti si possono risolvere con la logica del tre semplice diretto visualizzata in un **segmento frazionato**, operando **con i soli numeratori variabili**.

Problema diretto: Calcolare i $3/5$ di 20. (Che è il valore **5** quinti)



Il testo implica che **20** è il **valore dell'intero $5/5$** . Il quale si può rappresentare con un segmento diviso in 5 parti uguali: esse non sono espresse nel testo verbale, che però le implica, e sono da inferire.

Per calcolare il valore di $1/5$ si fa

$$20 : 5 \text{ (numeratore di } 5/5) = 4$$

Infatti i quinti dell'intero sono 5, quantificati dal **numeratore 5** della frazione apparente $5/5$, che esprime l'intero, non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita.

Per calcolare poi il valore di 3 quinti si fa

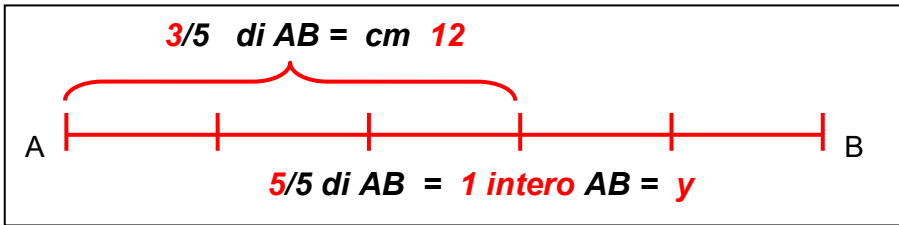
$$4 \times 3 \text{ (numeratore di } 3/5) = 12.$$

Perciò, con la logica del 3 semplice diretto e la riduzione all'unità si opera **con i soli numeratori**.

$$20 : 5 \text{ (numeratore di } 5 \text{ quinti)} = 4$$

$$4 \times 3 \text{ (numeratore di } 3 \text{ quinti)} = 12$$

**Problema inverso: I $\frac{3}{5}$ di un segmento misurano 12 cm.
 Quanto misura l'intero segmento?
 (Che è composto di 5 quinti)**



Poiché il valore di 3 quinti è 12,
 per calcolare il valore di 1 quinto si fa
 $12 : 3$ (numeratore di 3 quinti) = 4.

Per calcolare poi il valore dell'intero 5 quinti si fa
 4×5 (numeratore di 5 quinti) = 20.

$$12 : 3 \text{ (numeratore di 3 quinti)} = 4$$

$$4 \times 5 \text{ (numeratore di 5 quinti)} = 20$$

I quinti dell'intero, infatti, sono 5, quantificati dal **numeratore 5 della frazione $\frac{5}{5}$** , non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita. Perciò, con la logica del 3 semplice diretto e la riduzione all'unità si opera anche per i problemi inversi **con i soli numeratori**.

Le **operazioni e i numeri sono sempre gli stessi** in entrambi i procedimenti: quello che cambia è il significato di uno dei numeri, es. 5, negli esempi già visti.

Nelle **regola** dei problemi diretti e inversi, infatti, **5 è sempre il denominatore di $\frac{3}{5}$** . Nella logica del 3 semplice diretto **5 è sempre il numeratore di $\frac{5}{5}$** .

Con la logica del **3 semplice diretto** **5 è sempre il numeratore** della **frazione apparente** (es. **5 quinti**) che esprime l'intero. Essa non è esplicitata nel testo, che però la implica, si inferisce, cioè si capisce, e si può verbalizzare e scrivere per capirla meglio.

Essa è invece **si vede benissimo** quando si rappresenta il problema con **un segmento frazionato**. In questo, infatti, si visualizzano le parti uguali, non solo della **frazione** (es. **3/5**) espressa nel testo, ma anche della **frazione apparente** (es. **5/5**) che esprime l'intero, non espressa nel testo, da inferire e verbalizzare.

Nel segmento frazionato, **le parti uguali** (es. **5 quinti**) in cui esso è suddiviso, e quelle di una **sua frazione** (es. **3 quinti**), sono tutte ben visualizzate e indicate dai **numeratori** (es. **5 e 3**), in rapporto con le misure corrispondenti, di cui una nota e l'altra da calcolare. Per "spiegare" tali problemi si usa spesso un **segmento frazionato**, in cui è presente e ben visualizzata la logica del **3 semplice diretto**.

Ma poi si enuncia e si insegna la **regola codificata dei problemi diretti e inversi con le frazioni**, perché le **operazioni e i numeri sono sempre gli stessi**. Infatti il numeratore (es. 5) della frazione apparente che esprime l'intero (es. 5/5) è uguale al suo denominatore (es. 5): si può dire che fanno un tutt'uno. Ma è il **numeratore 5, "cardinale", che quantifica le parti** di cui si compone l'intero, mentre il denominatore "**quinti, ordinale**" serve per denominarle.

Ma vediamo altri esempi.

Logica del 3 semplice diretto con i soli numeratori

1-Problema **diretto**:

calcolare i $\frac{3}{5}$ di 20 (che è il valore di $\frac{5}{5}$)

1 quinto (0,2) vale ?

2 quinti (0,4) valgono ?

3 quinti (0,6) valgono y

4 quinti (0,8) valgono ?

5 quinti (1) vale 20

6 quinti (1,2) valgono ?

etc.

$$20 : 5 = y : 3$$

2 -Problema **inverso**: i $\frac{3}{5}$ di un numero y valgono 12.

Qual è il numero y?

1 quinto (0,2) vale ?

2 quinti (0,4) valgono ?

3 quinti (0,6) valgono 12

4 quinti (0,8) valgono ?

5 quinti (1) vale y

6 quinti (1,2) valgono ?




etc.

$$12 : 3 = y : 5$$

Come si vede dalle tabelle, in una serie di frazioni dello stesso intero, e con lo stesso denominatore, il *valore delle frazioni* dipende dai *numeratori variabili*, mentre il denominatore, essendo costante, non incide affatto sui valori delle frazioni stesse. Perciò, conoscendo il valore di una frazione qualsiasi, compresa quella apparente che esprime l'intero (es. $\frac{5}{5}$), si può calcolare il valore di tutte le altre frazioni dello stesso intero, e con lo stesso denominatore, dividendo il valore noto di una frazione **diviso il numeratore** della stessa, e moltiplicando il risultato **per il numeratore** della frazione di cui si vuol trovare il valore. Verrebbe meno così la *distinzione tra problemi diretti e inversi*, e il procedimento risolutivo sarebbe *sempre lo stesso*. Tale procedimento **esclude il denominatore**, che invece è un termine essenziale della frazione, sempre presente nei *calcoli formali*. Il denominatore perciò non può essere escluso dalle operazioni, e la regola codificata va rispettata, ma può essere meglio compresa se si ragiona anche con la logica del 3 semplice diretto e riduzione all'unità, che è logicamente coerente, ma non può sostituire la regola codificata.

3 -Problema senza l'intero

I $\frac{7}{5}$ di un segmento misurano 28 m. Quanto misurano i $\frac{3}{5}$ dello stesso segmento?

1 quinto	?	
2 quinti	?	
<u>3 quinti</u>	y	
4 quinti	?	
5 quinti (1)	?	
6 quinti	?	
<u>7 quinti</u>	28	
8 quinti = ?		
Ecc....		

$$7 : 28 = 3 : y$$

1-Soluzione con la logica del 3 semplice diretto

Nel problema in tabella non si fa alcun riferimento all'intero, ma soltanto a due frazioni di esso, $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{5}$, con lo stesso denominatore.

Ragionando con la logica del 3 semplice diretto e la riduzione all'unità,

per calcolare il valore di 1 quinto si fa $28 : 7 = 4$

E per trovare valore di 3 quinti, si moltiplica $4 \times 3 = 12$

In sintesi $28 : 7 \times 3 = 12$

2-Soluzione con la regola dei problemi diretti e inversi

Se no, con la regola codificata della frazione come operatore, tale problema risulta composto da **2 problemi**, uno inverso e l'altro diretto.

Infatti prima si deve calcolare il **valore dell'intero 5/5** conoscendo il valore 28 dei suoi 7/5, facendo $28 : 7 \times 5 = 20$.

Poi il valore dei **3/5 dell'intero**, facendo $20 : 5 \times 3 = 12$.

In sintesi, $28 : 7 \times 5 : 5 \times 3 = 28 : 7 \times 3 = 12$

Sono le **stesse operazioni** con gli **stessi numeri** e lo stesso risultato della soluzione precedente, ma il procedimento è più lungo e mnemonico.

3-Soluzione con la proporzione

Le stesse operazioni si ottengono anche usando il linguaggio formale delle proporzioni: $28 : 7/5 = y : 3/5$

da cui $7/5y = 28 \times 3/5$

ed infine $y = 28 \times 3/5 : 7/5 = 28 \times 3/5 \times 5/7 =$

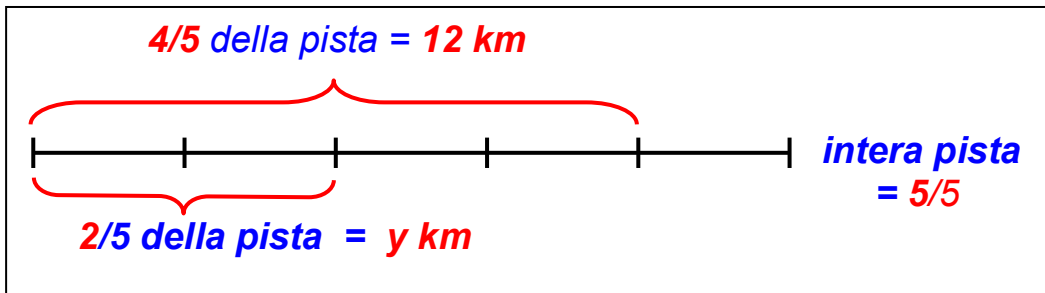
$= 28 \times 3 : 5 \times 5 : 7 = 28 \times 3 : 7 = 28 : 7 \times 3 = 12$

Si ritrova, anche con la proporzione, il **linguaggio formale** con le sue regole, e con i **denominatori**, che essendo **uguali**, nel calcolo si **elidono se si trovano uno sopra e l'altro sotto per operazioni inverse (moltiplicazione sopra, divisione sotto)**: infatti nella soluzione più intuitiva con la logica del 3 semplice diretto non ci sono affatto, perché, con la suddetta logica, essi “**non servono**”.

Problema

Anche il problema seguente ha la **stessa struttura logica** di quello già visto, e si risolve facilmente in modo intuitivo.

Giorgio ha percorso in bicicletta 12 km che sono i $\frac{4}{5}$ di una pista ciclabile, mentre il suo cucciolo, rincorrendolo, ne ha percorsi i $\frac{2}{5}$. Quanti km ha percorso il suo cucciolo?



1 Soluzione con la logica del 3 semplice diretto

Se **4 quinti** della pista sono lunghi 12 km, **1 quinto** della pista sarà lungo $12 \text{ km} : 4 = 3 \text{ km}$

2 quinti della pista sarà lunga $3 \text{ km} \times 2 = 6 \text{ km}$

In sintesi **$12 : 4 \times 2 = 6$**

2-Soluzione con la regola codificata dei problemi diretti e inversi

Con la frazione come operatore, il problema risulta composto da un *problema inverso e uno diretto*, e si deve calcolare:

-prima il **valore di $\frac{5}{5}$** della intera pista: $12 : 4 \times 5 = 15$;

-poi il **valore dei suoi $\frac{2}{5}$** , cioè $15 : 5 \times 2 = 6$.

In sintesi: **$12 : 4 \times 5 : 5 \times 2 = 12 : 4 \times 2 = 6$**

Sono le **stesse operazioni con gli stessi numeri** e lo stesso risultato, ma il procedimento è più lungo e mnemonico

3-Soluzione con la proporzione

Le stesse operazioni si ottengono anche usando il linguaggio formale delle proporzioni: $12 : 4/5 = y : 2/5$

da cui $4/5y = 12 \times 2/5$

ed infine $y = 12 \times 2/5 : 4/5 = 12 \times 2/5 \times 5/4 =$

$= 12 \times 2 : 5 \times 5 : 4 = 12 \times 2 : 4 = 12 : 4 \times 2 = 6$

La prima soluzione si capisce meglio, e potrebbe illuminare in parte anche le altre due.

Uno strano divorzio

Nella prima soluzione basata sulla logica del 3 semplice diretto, si tiene conto del diverso significato e della diversa funzione del denominatore e del numeratore, e si esclude il denominatore dai calcoli. Si provoca così, a causa della semantica, un “*divorzio*” tra i 2 termini della frazione, che il rigore matematico non ammette, poiché il denominatore è un termine essenziale della frazione. E si potrebbe dire: “*La semantica non separi ciò che la matematica ha unito.*” Ma il matematico René Thom, medaglia Field nel '58, osserva: “*Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare.*”

Il significato di $3/5$ è espresso dalle parole con cui si verbalizza, che di solito sono “*tre quinti.*” Il denominatore è un *numero ordinale* (*quinti*), ma si scrive, si pronuncia e si usa nei calcoli come *numero cardinale* (*5*), in modo ambiguo, e ciò può confondere. Ma si può anche verbalizzare “*tre su cinque*”, e cioè “*3 quinti su 5 quinti.*” In tal caso 5 è il denominatore della frazione *5 quinti*, che esprime l'intero: è un *numero cardinale*, come il numeratore 3 della frazione *3 quinti*. Come già detto è così che gli egiziani esprimevano le frazioni, con un linguaggio più appropriato: ed è il linguaggio, più o meno chiaro, che indirizza il pensiero, più o meno bene, come osserva Emma Castelnuovo. (*Si veda a pag. 255*) La verbalizzazione dei simboli e dei numeri, infatti, ne esprime e precisa i significati, sui quali si fonda il ragionamento. E tenendo conto di tali significati si possono trovare procedure diverse, come già visto, da quelle previste dalle regole, che, per i problemi considerati, sono le regole della frazione come operatore.

Esse ovviamente sono importanti e vanno apprese bene perché sono alla base del linguaggio formale matematico, a livelli di astrazione, rigore e complessità sempre maggiori. E col crescere di tali livelli, l'intuizione del significato diventa sempre più difficile ed impossibile. Ma, come dice René Thom, si deve curare il più possibile anche la comprensione del significato ed il riferimento e l'applicazione della matematica alla realtà, per evitare il verbalismo ed il formalismo astratti e mnemonici, alimentando il pensiero con il carburante del significato.

(Un bell'esempio si trova in "Geometria costruttiva", a pag. 279-280: "Bravo Aurelio!")

Semantica e sintattica: un "pro-f-ec-ondo" connubio.

Se si verbalizzano i simboli matematici, rappresentando anche concretamente i concetti che essi esprimono, se ne comprende meglio il significato. Ciò consente di ragionare, come già visto, in base al significato stesso, con un approccio "analogico-semantic", più intuitivo, aperto anche a percorsi diversi, ma che vanno poi ricondotti sui rigorosi "binari" del linguaggio formale. Che però in tal modo sarà più significativo. Il linguaggio formale ha una sua sintassi, dal rigore assoluto e di potenza straordinaria, con il rischio però di apparire agli alunni "un gioco astratto di simboli formali", senza capirne il significato ed il collegamento con la realtà. Ciò in parte è inevitabile e normale, specialmente ai livelli più alti e complessi, ma come dice il matematico René Thom, già citato: "Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare."

Ovviamente la cosa migliore è cercare di realizzare un “*pro-f-ec-ondo*” *connubio tra rigore e significato*, lasciando che il significato stesso, finché è possibile, possa illuminare e motivare il ragionamento, senza però smarrire mai la strada maestra delle regole del linguaggio formale, come si è cercato di fare con i problemi considerati.

In particolare bisogna sempre evitare che si formino concetti errati o *misconcezioni*, che potrebbe essere poi difficile rimuovere e rettificare.

Gli insegnanti devono decidere autonomamente

Le riflessioni fatte sono forse un po’ “singolari”, e potrebbero comprensibilmente non essere condivise. Ma mi sembrano fondate e coerenti, e potrebbero servire per capire meglio alcuni concetti ed orientare in modo più consapevole l’attività didattica, purché ciò avvenga con semplicità, gradualmente, senza complicazioni inutili, e senza confusioni.

E sono ovviamente gli insegnanti stessi che possono farlo se ne sono convinti, oppure non farlo se non hanno ancora maturato tali convinzioni, decidendo serenamente con autonomia di giudizio ed intelligente buon senso.

Possono anche ignorare, ovviamente, o criticare, le riflessioni fatte, se non le condividono e non le ritengono utili per il lavoro didattico: il quale richiede necessariamente che l’insegnante operi in base alle convinzioni che ha maturato, da verificare ed approfondire costantemente per aggiornarle alla luce di eventuali nuove consapevolezze e conoscenze utili per migliorare il lavoro didattico.

Alcuni insegnanti potrebbero aver bisogno di riflettere più a lungo per maturare le loro convinzioni, e potrebbero comunque introdurre gradualmente il nuovo approccio, verificando se funziona.

Si può ovviamente scegliere di insegnare soltanto la regola dei problemi diretti e inversi, che è la sola ufficialmente riconosciuta, da conoscere e applicare, come si è sempre fatto, se non si è sicuri e si temono eventuali confusioni. La suddetta regola, come già detto, è perfettamente valida per il linguaggio matematico formale codificato, e non può essere superata dall'approccio con la logica del tre semplice diretto. Questa, in tal caso, potrà semplicemente essere visualizzata con il segmento frazionato o altre rappresentazioni visive, soltanto a livello intuitivo, insegnando poi la regola consueta, come ho già detto, e come si è quasi sempre fatto da tanti insegnanti. Se ne può vedere un esempio anche in un video sulle frazioni di Camillo Bortolato su Youtube.

E tuttavia, il procedimento esemplificato con la logica del 3 semplice diretto, sebbene non riconosciuto a livello epistemologico, può essere molto utile sul piano didattico, per far capire meglio, magari solo in un primo momento, la soluzione dei problemi considerati. La conoscenza ed applicazione della regola si potrebbe magari introdurre anche in un secondo momento, comprendendone così la sua valenza più "formale" rispetto alla soluzione con la logica del tre semplice, più significativa e "sostanziale". Sono due approcci diversi, entrambi validi, ma su due piani diversi, che non devono contrapporsi, ma al contrario coesistere ed integrarsi.

Problema: il volo del calabrone (di Gamow)

Due treni partono contemporaneamente da due stazioni A e B, distanti 160 km, e si dirigono l'uno verso l'altro alla velocità di 80 km all'ora. Un calabrone parte nello stesso istante da A e va verso B seguendo i binari ad una velocità di 100 Km all'ora.

Quando incontra il treno proveniente da B si spaventa, inverte la rotta e vola verso A. Vola così avanti e indietro da un treno all'altro, finché questi si incrociano e il calabrone fugge via.

Qual è la distanza totale percorsa dal calabrone nei suoi andirivieni?

Soluzione - Anche in tale problema è possibile una soluzione semplicissima, direi tautologica, basata sul significato del testo. Altrimenti sarebbe necessario ricorrere all'algoritmo della *progressione geometrica*. Poiché i 2 treni corrono ciascuno a 80 km l'ora, dopo un'ora avranno percorso fra tutti e due 160 km e quindi, essendo partiti a 160 km di distanza, si incroceranno. Poiché il calabrone ha volato per tutto quel tempo, cioè per un'ora, a 100 km l'ora, avrà percorso 100 km.

Vittorio Duse osserva:

“Se ci si prova a risolvere il problema seguendo i singoli voli e le singole virate del calabrone, si trova la stessa risposta come somma di una progressione geometrica di ragione 1/9, ma con un procedimento molto più complesso. Anche ammettendo che una macchina possa risolvere tale problema, lo farà solo dopo aver avuto dall'uomo le opportune istruzioni e col metodo più meccanico e lungo. Ma nella mente dell'uomo cos'è che muove il pensiero in primo luogo verso la risoluzione e poi verso un tipo di risoluzione piuttosto che verso un altro? “ (V. Duse, "Per un insegnamento moderno della matematica elementare", La Scuola)

E se le due stazioni fossero state distanti 200 km? In tal caso i 2 treni si sarebbero incontrati dopo 1 ora e 1 quarto, e in tale tempo il calabrone, volando a 100 km all'ora, avrebbe percorso 125 km.

Problema: *settimana corta dell'età.*

Senza contare i sabati e le domeniche io avrei 50 anni. Quanti anni ho io in tutto contando anche i sabati e le domeniche ?

Questo problema riguarda un *contenuto molto familiare* ed è formulato con un *linguaggio ordinario* diverso da *quello matematico*. Ciò può aiutare a capire meglio, ma può anche disorientare chi non è abituato a collegare il linguaggio matematico con quello ordinario,

Soluzione

La prima idea che di solito viene in mente è quella di calcolare tutti i giorni tolti in 50 anni, per poi trasformarli in anni e aggiungerli ai 50 anni dati, moltiplicando 2 giorni per le 52 settimane di ogni anno, per 50 anni. Tale intuizione è valida ma richiede un ragionamento più difficile di quello molto più semplice che segue.

Considero che **1 giorno è 1 settimo** di un'intera settimana, che è formata da **7 settimi**. Senza il sabato e la domenica prendo 5 giorni per ogni settimana, cioè **5 settimi**, che corrispondono a **50 anni** dell'età totale. Si deve perciò **calcolare il valore dell'intero 7/7 conoscendo il valore 50 di 5/7**: è quindi un problema **inverso** con le frazioni.

$$**1 settimo dell'età totale = 50 : 5 = 10 anni**$$

$$**7 settimi = 10 x 7 = 70 anni in tutto**$$

Se pongo $y = \text{età totale}$ posso impostare la proporzione:

$$**50 : 5 = y : 7 \quad \text{da cui} \quad 5y = 50 x 7**$$

$$**\text{ed infine} \quad y = 50 : 5 x 7 = 10 x 7 = 70**$$

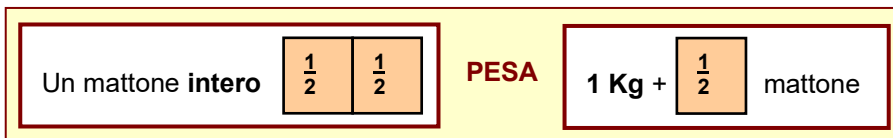
Problema: *il peso del mattone*

Il testo del problema che segue è formulato in modo da trarre in inganno, con un **uso fuorviante delle parole**, che inducono a pensare in modo errato, cortocircuitando il ragionamento logico, e a rispondere: 1 e mezzo.

Un mattone pesa **1Kg più mezzo mattone**: quanto pesa il mattone?

Soluzione

Il testo è un'equazione verbale: rappresentata con il disegno è molto più intuitiva e facilita la soluzione.



Si vede infatti chiaramente che, nel secondo membro, al posto di mezzo mattone c'è 1 kg. Perciò

1 mezzo del mattone = 1 Kg,

2 mezzi del mattone, (cioè 1 mattone intero) = 2 Kg

Con l'equazione e il linguaggio formale

pongo $y =$ peso del mattone

$$y = 1 + \frac{1}{2} y$$

$$y - \frac{1}{2} y = 1$$

$$\frac{1}{2} y = 1$$

$$y = 1 : \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 2$$

FRAZIONE COME RAPPORTO e PROBLEMI DEL 3° e 4° TIPO

Mi è capitato più volte che ragazzi di prima media sono venuti da me perché non riuscivano a risolvere problemi come quello che segue:

Problema

Un rettangolo ha l'altezza che è $\frac{3}{5}$ della base e il suo perimetro è di 6 metri. Quanto misurano la base e l'altezza? E l'area?



Altezza = 3 quinti della base

Base = 5 quinti

E' un problema "del terzo tipo" con le frazioni, dopo quelli *diretti e inversi*, già visti. I problemi del terzo tipo con le frazioni sono quelli in cui si conosce *la somma del valore di due grandezze* e il loro *rapporto*, e si deve calcolare il valore di ciascuna delle due grandezze.

Nel problema considerato abbiamo la somma delle misure della *base + altezza = 32*, calcolata dividendo a metà il perimetro 64; e il loro rapporto, *altezza = $\frac{3}{5}$ della base*.

La regola dice che, per calcolare il valore della base e dell'altezza, si divide la somma delle loro misure, 32, diviso la somma, 8, del numeratore, 3, più denominatore, 5, della frazione, $\frac{3}{5}$, che ne esprime il rapporto. Ma non si capisce cosa quantifichi questo 8: otto che cosa?

Poi, per calcolare la misura dell'altezza, si moltiplica il risultato, 4, per il numeratore, 3, della frazione $\frac{3}{5}$, ottenendo 12, misura dell'altezza. E per calcolare la misura della base si moltiplica *4 per il denominatore 5 di $\frac{3}{5}$* , ottenendo 20, misura della base.

Ma anche qui non si capisce perché si moltiplica *4 per il denominatore 5*, che serve per denominare le parti uguali e non a quantificarle. Poi è facile calcolare l'area.

In base alla regola perciò si fa:

$$64 \text{ m} : 2 = 32 \text{ m} \text{ (base + altezza = semiperimetro)}$$

$$3 + 5 = 8 \text{ (numeratore + denominatore)}$$

$$32 \text{ m} : 8 = 4 \text{ m}$$

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ (numeratore)} = 12 \text{ m (h)}$$

$$4 \text{ m} \times 5 \text{ (denominatore)} = 20 \text{ m (b)}$$

$$12 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 240 \text{ m}^2 \text{ (area)}$$

I ragazzi erano in difficoltà, sebbene avessero studiato la regola esposta sopra, che però è mnemonica, e perciò non aiuta a capire e a ragionare. Hanno invece capito facilmente ragionando sulla base del significato dei numeri. **Se l'altezza è 3 quinti della base, la base è 5 quinti, e la loro somma è 8 quinti della base: 8 è la somma dei numeratori 3 e 5 e si riferisce a tutti i quinti della base.** Questi 8 quinti misurano in tutto 32 m, perciò, per calcolare la misura di 1 quinto della base devo fare $32 \text{ diviso } 8 = 4$, misura di 1 quinto. Per calcolare la misura dell'altezza, che è 3 quinti della base, moltiplico 4, (misura di 1 quinto), per 3 = 12, misura dell'altezza. Per calcolare la misura della base, che è 5 quinti, moltiplico 4 per 5 = 20, misura della base.

Così si capisce facilmente.

È bastato esplicitare che se l'altezza è 3 quinti della base, la base è 5 quinti, in tutto 8 quinti, somma dei 2 numeratori, $3 + 5$, che misurano in tutto 32 m.

Nella regola invece 8 è la somma del numeratore 3 + denominatore 5 della frazione $3/5$, ma non è chiaro che questo 8 indica tutti i quinti della base. Poi si fa ugualmente 32 diviso 8, ma non non si capisce perché, non essendo chiaro, appunto, a cosa si riferisca il numero 8.

E non si capisce neanche perché, per calcolare la misura della base, si moltiplica il risultato 4, per il denominatore 5 di $3/5$, mentre lo si capisce benissimo se moltiplico lo stesso 4, valore di 1 quinto, per il numeratore 5 di 5 quinti, che sono tutti i quinti della base, quantificati appunto dal numeratore di 5 quinti e non dal denominatore di $3/5$.

I numeri sono gli stessi, ma cambia il loro significato.

Perciò i ragazzi, dovendo applicare la regola mnemonicamente, erano in difficoltà perché non potevano fare un ragionamento significativo e non capivano il significato di ben due operazioni.

Gli stessi invece ragionavano bene se capivano il significato dei numeri. Tale significato, perciò, dovrebbe illuminare il più possibile il linguaggio matematico, che, per essere rigoroso, prescinde spesso, giustamente, dal significato stesso, ma rischia così di rendere la matematica “un gioco astratto di simboli formali”, con l'applicazione di regole mnemoniche. *(Si veda a pag. 192-193)*

Lo stesso discorso vale per i problemi del quarto tipo, in cui si conosce la differenza tra i valori di due grandezze ed il loro rapporto. Ad es. *La differenza tra la misura della base e quella dell'altezza di un rettangolo è 8 metri, e la base è $\frac{3}{5}$ dell'altezza. Calcolare la base e l'altezza.* La regola dice che si divide la differenza data 8, diviso la differenza tra i due termini della frazione, $\frac{3}{5}$, che ne esprime il rapporto: cioè *denom. 5 – num. 3 = 2*.

Cioè $8 : 2 = 4$. Poi si moltiplica 4 per il numeratore $3 = 12$ (altezza); e lo stesso 4 per il denominatore $5 = 20$ (base). Come nel caso precedente non si capisce perché si devono fare tali operazioni.

Ma basta esplicitare che la differenza, 8 metri, corrisponde a 5 quinti – 3 quinti = 2 quinti della base, per capire facilmente le operazioni da fare, in base al significato dei numeri.

Gli stecchini di Emma Castelnuovo

Nelle pagine precedenti abbiamo visto come una delle cause che ostacolano la comprensione del testo dei problemi, e di conseguenza il ragionamento per poterli risolvere, è l'opacità del linguaggio stesso usato nei testi, che va perciò illuminato con una verbalizzazione più chiara, che ne espliciti meglio il significato, anche con rappresentazioni concrete o disegnate, in cui sia ben visualizzato il significato stesso delle parole e locuzioni.

Emma Castenuovo spiega come un'altra causa della difficoltà a capire e risolvere tali problemi consista nella astrattezza dei testi e del disegno stesso. Evidenzia perciò l'importanza di rappresentare concretamente il problema con materiali e sussidi concreti, come ad esempio gli stecchini.

La Castelnuovo riporta la seguente esperienza didattica:

“ Comincio col riferire un'esperienza che ho fatto per molti anni in una prima media. Essa, mettendo in evidenza le difficoltà che incontra un ragazzo nella formazione operativa e concettuale, mi ha indotto a sostituire il disegno con un materiale. Proponiamo ai ragazzi il problema: *disegnare un rettangolo avente la base tripla dell'altezza.*

Ecco come i ragazzi eseguono la costruzione col disegno: alcuni, valendosi del doppio decimetro, fissano una certa lunghezza per l'altezza, la triplicano, e disegnano così la base; altri si valgono del foglio a quadretti per disegnare, per esempio, l'altezza lunga come il lato di un quadretto, e quindi, poi, la base lunga come tre di quei lati; altri ancora disegnano un rettangolo senza prendere le misure, ma mettono in evidenza che la base è tripla dell'altezza dividendo la base in tre parti, che dovrebbero poi essere ciascuna uguale all'altezza, cosa che spesso non si verifica.

Dopo che i bambini hanno effettuato il disegno, si dice: “-Se fosse data la lunghezza del perimetro di quel rettangolo, sarebbe possibile determinare la lunghezza della base e dell'altezza?” Si osserva allora che i bambini danno le risposte più impensate; dicono: “-Si divide il perimetro per 2, per 4, per 3!”.

Si rimane perplessi e si nota che i bambini non osservano affatto il rettangolo che hanno disegnato sul quaderno, e, anche incoraggiati ad esaminare il disegno che hanno tracciato essi stessi, "*non lo vedono*". Evidentemente è una costruzione eseguita senza avervi ragionato.

Riflettiamo: osservare quel rettangolo significa scomporre il suo contorno negli elementi che lo formano, significa pensare la base come composta di tre elementi uguali fra loro e uguali all'altezza; occorre dunque che il ragazzo, dopo aver fatto la sintesi degli elementi, cioè la costruzione, ne faccia l'analisi, e, poi, metta in relazione il perimetro con la somma dei segmenti che compongono la figura: si tratta dunque di concepire un'equazione di 1° grado.

L'osservazione didattica che possiamo fare è questa: il bambino non osserva il rettangolo, non riesce ad analizzarlo, a vederlo cioè nei suoi elementi, ma solo globalmente come un tutto inscindibile, anche se è stato lui a disegnarlo.

Facciamo ora risolvere lo stesso problema utilizzando un materiale semplicissimo: degli *stecchini*, tutti uguali. Ogni bimbo costruirà il suo rettangolo utilizzando uno stecchino per l'altezza e tre stecchini per la base.

Dopo aver costruito questo rettangolo, non c'è bambino che, assegnato un valore per il perimetro, non sappia dire immediatamente quale procedimento deve seguire per trovare le lunghezze delle due dimensioni.

Che cosa c'è di diverso in questa costruzione dalla costruzione col disegno?

Qui, il bambino si rende conto, nell'effettuare la costruzione, della relazione della parte al tutto, dello stecchino rispetto a tre stecchini; e vi dirà subito:

“-Occorre contare il numero degli stecchini”.

Si passa dall'elemento alla sintesi degli elementi: il metodo è sintetico, all'inizio. Poi si assegna un dato, la lunghezza del perimetro, e si chiede la lunghezza ipotetica dell'elemento. Si ritorna indietro, si scompone; ora, davanti alla effettiva costruzione, il bimbo riesce ad analizzare la figura.

(Emma Castelnuovo, Didattica della matematica.)

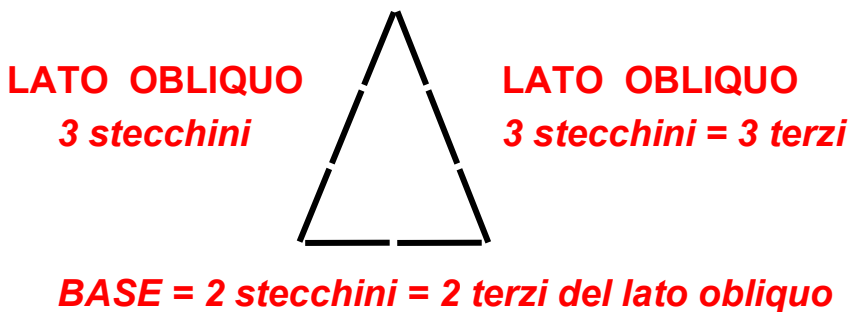
In una quarta elementare gli alunni non riuscivano a capire il testo del seguente problema: *Un triangolo isoscele ha la base che è la metà del lato obliquo. Il suo perimetro misura 50 metri. Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?* L'hanno poi costruito con gli stecchini, risolvendolo facilmente.

Vediamo un altro esempio.

*Un triangolo isoscele ha la **base che è i 2/3 del lato obliquo.***

Il perimetro misura 80 m. Quanto misurano i lati obliqui e la base?

Costruendo il triangolo con gli stecchini si intuiscono facilmente le operazioni da compiere per risolverlo. *(Si veda a pag. 312: Scatola con stecchini)*



Emma Castelnuovo osserva: *“E lo stecchino, questo materiale da nulla, assume per il bimbo un valore enorme: è il mezzo per risolvere dei problemi costruendo e contando, operazioni, queste, che impongono di non verbalizzare.”*

Ma attenzione! Non è vero che esse “impongono” di non verbalizzare: semplicemente *“non lo richiedono.”* La difficoltà a capire il testo dipende invece spesso proprio dal fatto che non si cura la verbalizzazione appropriata piena di significato delle rappresentazioni fatte con gli stecchini o altro, o col disegno.

La quale invece aiutare molto a capire i testi e ad orientare il pensiero, come afferma la stessa Castelnuovo già citata: *“Ci si chiede se non sia proprio l'espressione “m-ennesimi” che fa perdere di vista il valore relativo della frazione; se, insomma non sia proprio il linguaggio, troppo raffinato e sintetico, a nascondere il vero significato della frazione. Si tratta di una questione di semplice linguaggio, ma spesso è proprio il linguaggio a indirizzare il pensiero.”* (Si veda a pag. 255)

Mica tanto *“semplice linguaggio”*! Perché è proprio il linguaggio che veicola i significati, i quali sono il carburante del pensiero. Se non si verbalizza correttamente si priva il pensiero di un mezzo importantissimo. Mi pare che si corra questo rischio anche con il *“metodo analogico”* in cui i problemi sono rappresentati col disegno, e sono perciò facili da capire e risolvere “a volo”, ma se si trascura la verbalizzazione sarà poi più difficile comprendere i testi verbali. Verbalizzare, invece, anche solo oralmente, ma con un linguaggio appropriato e codificato, le rappresentazioni disegnate o fatte con stecchini o altro, capendone bene il significato in esse visualizzato, è il modo più semplice ed efficace per capire poi i testi verbali, in cui si ritrovano le stesse parole e locuzioni, ed eventualmente rappresentarli, col disegno o altro, risolvendo facilmente i problemi.

Rappresentare, capire, verbalizzare

La verbalizzazione appropriata e significativa, anche solo orale, con cui si esprimono i concetti e i significati rappresentati con il disegno o i sussidi riveste una grande importanza. Grazie ad essa l'alunno sarà poi in grado di fare anche l'inverso, e cioè comprendere il significato dei testi verbali, e tradurli, se necessario, in disegni o rappresentazioni concrete, che D'Amore considera "*l'anticamera logica della soluzione*", poiché visualizzano il significato dei problemi che è alla base del ragionamento.

I sussidi e le rappresentazioni concrete o figurate sono molto importanti, ma non devono far trascurare il linguaggio verbale e i simboli matematici. Ne devono invece costituire un potente trampolino di lancio, riempiendo di significato le parole e i simboli stessi, come un prezioso carburante che alimenta il pensiero.

E i linguaggi verbale e simbolico saranno tanto più pieni di significato quanto più si saranno curate la verbalizzazione e la simbolizzazione riferite alle rappresentazioni concrete, in "presa diretta" con il pensiero, come peraltro avviene nella vita reale, quando si verbalizzano le esperienze, i fatti e tutte le cose con parole piene di significato.

Spesso invece si salta tale fase di "*carica semantica*", e ci si limita a lavorare, in modo anche interessante, sui testi verbali, restando però in un ambito verbale astratto, o si illustrano o rappresentano concretamente i testi stessi con alcuni esempi, andando dall'astratto al concreto.

Ma non si fa un lavoro più mirato ed efficace di verbalizzazione, anche solo orale, delle rappresentazioni e operazioni concrete, andando dal concreto all'astratto, in presa diretta tra pensiero, linguaggio, simboli e significati visualizzati nelle rappresentazioni concrete stesse.

Questo ritengo invece che sia il modo più efficace per assicurare l'acquisizione di un linguaggio verbale pieno di significato, e quindi la comprensione dei testi verbali e dei simboli del linguaggio matematico codificato, evitando il vuoto verbalismo, del quale la verbalizzazione significativa riferita al concreto ed al vissuto, è il miglior antidoto: aumentando questa diminuisce quello.

(Si veda a pag. 20-22: “Triangolo semiotico...Pensiero e linguaggio in presa diretta con l'esperienza”.

E a pag. 193: Mussen e Kagan: “Linguaggio e sviluppo cognitivo”)

Ad esempio, come abbiamo già visto, il concetto di rapporto e i problemi con lo stesso risultano difficili perché sono estranei all'esperienza ed al linguaggio ordinario degli alunni, che non capiscono il significato delle parole e del testo, come avviene anche per altri problemi e argomenti. A ciò si può ovviare, non solo e non tanto “spiegando” con qualche esempio concreto, ma facendo costruire, vedere, capire e verbalizzare in modo appropriato vari rapporti. In tal modo il concetto di rapporto e le relative rappresentazioni concrete o figurate, con le verbalizzazioni e scritture simboliche, diventano familiari agli alunni, che così afferrano facilmente il significato delle parole e dei simboli, e diventano capaci di comprendere facilmente i testi verbali e tradurli, se necessario, in rappresentazioni chiare, e ragionare consapevolmente per risolvere i problemi. *(Si veda alla prossima pagina 271)*

Anche Bortolato, nel suo “*metodo analogico*”, usa le rappresentazioni concrete o figurate, per rappresentare i problemi. E grazie ad esse gli alunni capiscono “a volo” la soluzione, come avviene in parte, con le ovvie differenze, anche con il metodo usato per i sordomuti. Ma se non si fa anche verbalizzare in modo appropriato, conforme al linguaggio matematico codificato, gli alunni possono poi trovare difficoltà nella comprensione dei testi verbali. La quale invece è molto facilitata se si verbalizzano le rappresentazioni figurate o concrete e il procedimento risolutivo, con parole e locuzioni appropriate, che in tal modo si caricano di significato, e che poi, quando si ritrovano nei testi, vengono comprese anche senza riferimenti concreti, in un progressivo ed importante processo di astrazione ed uso significativo dei simboli astratti e del linguaggio verbale matematico.

Oltre alla verbalizzazione è importante cercare anche di capire ed esplicitare, gradualmente, ma senza pedanteria pignolesca, i vari passaggi del ragionamento che hanno portato alla soluzione, altrimenti c'è il rischio di restare legati ad una eccessiva immediatezza intuitiva globalistica e generica, che può inceppare un ragionamento logico più chiaro, consapevole ed articolato, e la sua verbalizzazione appropriata, fondamentale per la formazione dei concetti e del pensiero logico ed argomentativo.

Nel seguente rettangolo, costruito con stecchini o disegnato, è visualizzato il rapporto tra le sue dimensioni, che si può verbalizzare in vari modi.



ALTEZZA = 3 quinti della BASE

BASE = 5 quinti

SEMIPERIMETRO = BASE + ALTEZZA = 8 quinti della base



ALTEZZA = 3 terzi

BASE = 5 terzi dell' ALTEZZA

SEMIPERIMETRO = BASE + ALTEZZA = 8 terzi dell'ALTEZZA

*L'ALTEZZA è $\frac{3}{5}$ della BASE, che è $\frac{5}{5}$;
il PERIMETRO è $\frac{16}{5}$ della base;
il SEMIPERIMETRO (base + altezza) è $\frac{8}{5}$ della base.*

*La BASE è $\frac{5}{3}$ dell'ALTEZZA, che è $\frac{3}{3}$;
il PERIMETRO è $\frac{16}{3}$ dell'ALTEZZA;
il SEMIPERIMETRO (base + altezza) è $\frac{8}{3}$ dell'ALTEZZA.*

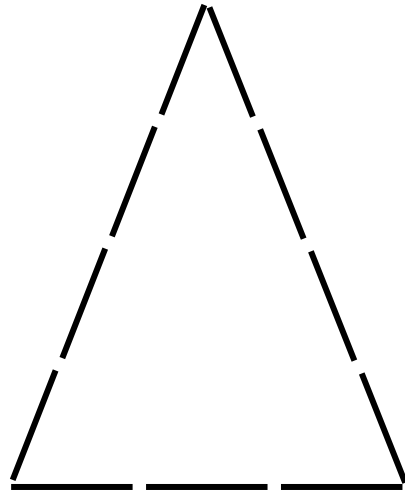
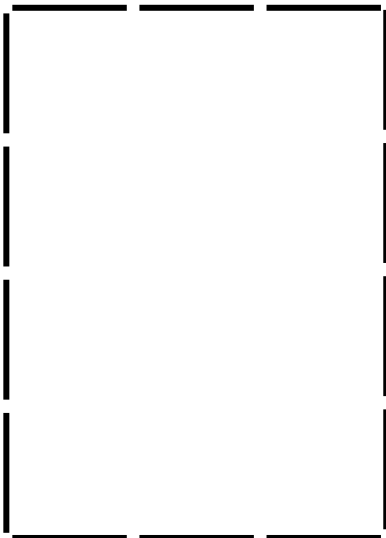
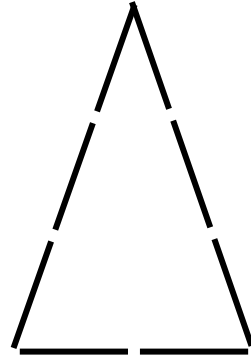
Tale esercizio, guidato dall'insegnante finché necessario, va ripetuto anche con altre figure ed altri rapporti, in vari modi, anche più semplici e concreti, ed anche solo oralmente, per consolidare il concetto di rapporto, con diverse verbalizzazioni, che renderà poi facile capire il testo dei problemi con i rapporti, e risolverli. Ad es. costruisco il rettangolo con gli stecchini, poi faccio verbalizzare:

*La BASE è 5 stecchini, cioè 5 quinti. Uno stecchino è 1 quinto della BASE. L'ALTEZZA è 3 stecchini, cioè 3 quinti della BASE. BASE più ALTEZZA (SEMIPERIMETRO), è 5 stecchini + 3 stecchini =
= 8 stecchini, cioè 8 quinti della BASE.*

Lo stesso posso fare partendo dall'altezza di 3 terzi e in altri modi. Verbalizzare la stessa rappresentazione in vari modi aiuta a capire meglio e consolidare i concetti. *(Si veda a pag. 23, 250 e 359).* Ci sono alunni che capiscono più rapidamente lavorando anche a un livello più astratto, solo col disegno ed anche senza, con parole e simboli. L'importante è che capiscano e consolidino bene il significato sia delle parole che dei simboli.

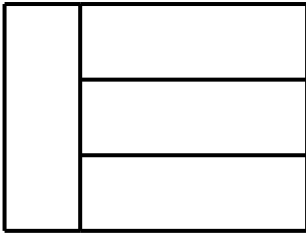
Verbalizzare i rapporti

Verbalizzare i rapporti diretti e inversi tra la **base e l'altezza** dei 2 rettangoli e tra la **base e il lato obliquo** dei 2 triangoli isosceli, come nella pagina precedente.

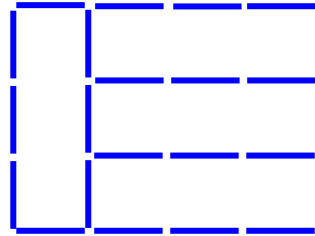


PROBLEMA - La scatola disegnata ha 4 scomparti uguali.

Il suo perimetro è 70 cm. Calcolarne l'area.



Scatola disegnata



Costruita con stecchini uguali

Costruendo la scatola con degli stecchini uguali la soluzione è molto più facile. Si vede infatti che il **lato grande** dello scomparto verticale coincide con **3 latini piccoli** dei 3 scomparti orizzontali e con **l'altezza** (lato minore) della scatola; perciò la sua **base** (lato maggiore) corrisponde a **4 latini piccoli**.

E il **perimetro** a $4 + 3 + 4 + 3 = 14$ **latini piccoli** degli scomparti.

Con il linguaggio matematico.

L'**altezza** della scatola è $\frac{3}{4}$ della **base**, che è $\frac{4}{4}$, e la loro somma è $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ **della base**.

E viceversa la **base** è $\frac{4}{3}$ dell'**altezza**, che è $\frac{3}{3}$, e la loro somma è $\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ **dell'altezza**.

Il perimetro è $\frac{14}{3}$ dell'altezza o $\frac{14}{4}$ della base.

Dividendo il **perimetro, 70 cm, diviso in 14 parti uguali**, si ottiene **5** cm, che è la misura di un **latino piccolo** degli scomparti. Ecc...

70 cm : 14 = 5 cm (misura latino piccolo scomparti)

5 cm x 3 = 15 cm (altezza: lato minore della scatola)

5 cm x 4 = 20 cm (base: lato maggiore della scatola)

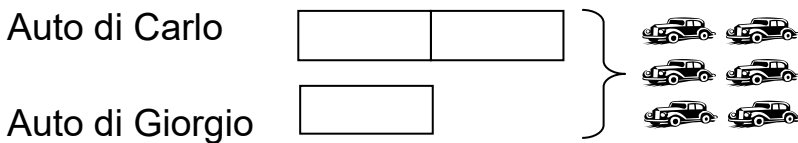
20 cm² x 15 = 300 cm² (area della scatola)

Gradualità e livelli di astrazione

Fondamentale è la gradualità nelle difficoltà da affrontare. I problemi con la *somma e il rapporto* di 2 grandezze, ad es., possono essere anche semplicissimi, come il seguente:

Problema -Giorgio dice a Carlo: -Io ho la **metà** delle tue automobiline; se le mettiamo **insieme** abbiamo in tutto 6 automobiline. *Quante automobiline ha Carlo? E quante Giorgio?*

La soluzione è intuitiva, con la manipolazione o il disegno.



Secondo livello: secondaria di primo grado

Lo stesso problema, con gli stessi dati, può essere formulato in modo molto più astratto:

Problema - Trovare 2 numeri sapendo che la loro **somma è 6** e che uno è la **metà** dell'altro.

Si può visualizzare il problema anche con 2 segmenti.

Uno dei 2 numeri è diviso in **2 mezzi** e l'altro è **1 mezzo del primo**.

In tutto sono **2 mezzi + 1 mezzo = 3 mezzi = 6**.

Per trovare **1 mezzo** faccio **6 diviso 3 = 2** (valore di **1 mezzo**)

Poi moltiplico **2 per 2 = 4** che è il valore di **2 mezzi**.

Terzo livello: secondaria di secondo grado.

Si può formulare lo stesso problema a livello ancora più astratto e generale :

Problema - Trovare 2 numeri conoscendo la loro somma S e sapendo che **uno è la metà dell'altro**.

Basta impostare e risolvere il semplicissimo sistema di equazioni

$$\begin{cases} z + y = S \\ z = 1/2 y \end{cases}$$

SUSSIDI DIDATTICI

TRAMPOLINO DI LANCIO PER L'ASTRAZIONE

Un'insegnante una volta mi disse che preferiva far usare meno possibile agli alunni i sussidi concreti perché altrimenti essi ne avevano **sempre bisogno**, e trovavano **difficoltà ad astrarre** i concetti.

Rimasi molto **sorpreso**, poi pensai che quell'insegnante **usava male i sussidi concreti, trascurando di far esprimere verbalmente con linguaggi verbale e simbolico i concetti rappresentati con i sussidi, con un graduale processo di astrazione.**

I sussidi concreti, infatti, **se usati bene**, sono un un potente **trampolino di lancio** verso l'astrazione, per far **capire meglio i concetti** ed esprimerli con i **linguaggi** ed i **simboli astratti**, evitando il **verbalismo vuoto** e l'apprendimento **mnemonico**. I quali spesso dipendono proprio dal **mancato uso di sussidi** concreti adeguati, pensando che bastino le spiegazioni verbali, magari accompagnate da qualche disegno: così facendo, però, si rischia di mettere il **carro davanti ai buoi**.

I sussidi concreti, perciò, non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e l'uso dei **simboli astratti**. Anzi, devono essere il loro **trampolino di lancio, grazie alla verbalizzazione piena di significato, una sorta di "carica semantica"**. I linguaggi verbale e simbolico, infatti, saranno tanto più pieni di significato quanto più si sarà curata adeguatamente la **verbalizzazione** riferita all'esperienza concreta, in **"presa diretta"** con il **pensiero**. E grazie a ciò diminuirà sempre più anche la necessità di sussidi ed esempi concreti, pur sempre importanti, per capire, ragionare e risolvere problemi, in cui riveste un ruolo fondamentale la **comprensione semantica** delle **parole** e del **testo**, come dimostrano molte ricerche.

Mussen-Conger-Kagan, nel libro *“Linguaggio e sviluppo cognitivo”*, affermano:

*“Dagli scritti di **Piaget** si può di tanto in tanto dedurre implicitamente che il bambino di **5 anni** è **incapace** di serializzare in qualsiasi dimensione, e nessun bambino di **7 anni** è capace di ragionare su qualsiasi argomento **senza oggetti concreti**.*

*Queste affermazioni categoriche sono ancora **controverse**. La maggior parte dei bambini di **5 anni** sostiene che **il proprio padre** è più grande di **un coniglio**, e che un coniglio è più grande di **un topo**, e si rende conto che **il proprio padre** è più grande di **un topo**, rivelando così una capacità di **ordinare** gli oggetti secondo una dimensione di grandezza.*

*La differenza tra questo problema e quelli utilizzati da Piaget consiste nel fatto che il problema del **padre** e del **coniglio** si riferisce a **nozioni molto familiari**. **Se non capisce la domanda che gli viene fatta, il bambino agirà ovviamente a un livello immaturo.***

Piaget** sostiene ad es. che il bambino di **8 anni** non riesce a **classificare** se stesso in **2 dimensioni contemporaneamente**, cioè non riesce a considerarsi nello stesso tempo membro di **una città** ed anche di **un paese**. **Uno dei motivi di questa carenza dipende dal fatto che il bambino non comprende completamente il significato semantico delle parole città e paese: non sa che una città fa parte di una nazione. Si può dimostrare che il bambino di **5 anni** è capace di **doppie classificazioni quando comprende i 2 concetti.**

*Il bambino di **5 anni** sa di far parte della famiglia **Rossi** e, nello stesso tempo, del sesso **maschile**.*

Mussen-Conger-Kagan concludono:

*“I passi avanti compiuti sulla via del **linguaggio** aprono la strada ai progressi nell’ apprendimento complesso, nella formazione dei concetti, nel **pensiero**, nel ragionamento e nella soluzione dei problemi. Queste **attività cognitive** ad alto livello vengono considerevolmente accentuate dalla **mediazione verbale**. Il **linguaggio** e il processo di definizione (mediazione verbale), esercitano **un’influenza enorme** sul processo di soluzione dei problemi ecc....”*

Guido Petter fa il seguente esempio:

*“A **Torino** vive circa un **milione di persone**. Sulla testa di una persona non crescono più di **300.000 capelli**.*

*E’ possibile affermare che a **Torino** ci sono sicuramente **2 persone** con lo **stesso numero** di capelli?”.*

La soluzione è molto più facile se il problema, con la stessa struttura logica, contiene però dati più intuitivi. Ad esempio:

*“Sappiamo che **i mesi** dell’anno **sono 12**. In una certa classe di una scuola ci sono **13 bambini**. E’ possibile dire che in quella classe ci sono certamente **2 bambini** nati nello **stesso mese** ?”. (G. Petter, “Psicologia e scuola primaria”)*

Keith Devlin scrive:

“Se trovavano un prodotto che costava **4 dollari** per un pacco da **3 etti** e un pacco più grande di **6 etti per 7 dollari** molti acquirenti confrontavano in realtà i rapporti $4/3$ e $7/6$ per vedere qual era il maggiore. Per cui i ricercatori avevano inserito nel test la domanda: “**Qual è maggiore tra $4/3$ e $7/6$?**” Ma la stessa acquirente che se l’era cavata benissimo al supermercato, nel **test sbagliava. Ecc...**

I bambini (venditori di noci di cocco) erano sempre **precisi quando sedevano dietro la loro bancarella**, ma si dimostravano veri e propri **asini** quando veniva loro proposto lo **stesso identico problema aritmetico, espresso però in una tipica formulazione scolastica.**

I ricercatori ne rimasero così impressionati e incuriositi che coniarono un nome apposta per tutto ciò: **matematica di strada. Ecc...**(Impressionati da un fatto così **ovvio**? Un po’ **tonti!** (Nota dello scrivente) Poiché, sia i bambini di Recife sia gli alunni di Herndon avevano dimostrato di essere capaci di **operare tranquillamente** con l’aritmetica in alcuni **contesti a loro familiari**, quando **i numeri avevano per loro un significato**, sembra chiaro che **il significato**, o il senso pratico immediato, ha un **ruolo fondamentale** nella nostra capacità di fare dell’aritmetica.”

(Keith Devlin, “L’istinto matematico”)

La linfa della comprensione alimenta il pensiero.

Se non si capisce il significato del linguaggio e dei simboli si **atrofizza** la matematica, privandola della **linfa vitale** della **comprensione** dei concetti, che riempie di significato le scritte simboliche e fonda gli **algoritmi** di calcolo e il **ragionamento** nella soluzione dei problemi, in modo anche originale.

Ma il rigore degli algoritmi porta a prescindere dal significato, che invece è fondamentale per poter capire e ragionare.

René Thom, medaglia Field '58, (il “*nobel*” della matematica) osserva: *“Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest’ultimo senza esitare”* (G. Ottaviani, “La teoria degli insiemi...”, su internet).

Nel libro di **Keith Devlin**, “L’istinto matematico”, si costata come i **venditori** di noci di cocco e gli **acquirenti** del supermercato se la cavano benissimo con la **“matematica di strada”, “naturale” e piena di significato**, con calcoli e problemi pratici e significativi, collegati con l’esperienza ed il vissuto, mentre **falliscono con la “matematica scolastica”, perché astratta..**

Devlin osserva: *“Il problema che molte persone hanno con la matematica scolastica è che non sono mai arrivate a comprenderne il significato: rimane per sempre un gioco astratto di simboli formali.”*

E allora bisogna cercare di **“gettare un ponte”**, come dice **Hans Freudenthal**, tra la **“matematica naturale” intuitiva**, e quella **“scolastica”, formale**, con una **didattica laboratoriale** e un approccio **“sostanziale-significativo”**, per capire meglio anche quello **“formale.”** (*Pellerey, “Progetto RICME”, I*).

Tale criterio è tanto più importante quanto più i simboli matematici sono **astratti**, come quelli delle **frazioni**, in cui ovviamente aumenta il **rischio di formalismo** astratto e mnemonico.

Mente linguaggio apprendimento

L'importanza delle conoscenze ben organizzate e strutturate è stata evidenziata dalle teorie degli “*script*”, “*frame*”, “*schemi*”, presentate da Dario Corno e Graziella Pozzo nel libro “*Mente, linguaggio, apprendimento*”, in cui si afferma: “*Pare che la maggior parte delle nostre capacità di ragionamento sia legata a schemi particolari di particolari ambiti di conoscenza.*”

Tale conclusione è suggerita da alcuni **esperimenti**, tra cui quello di Laird e D'Andrade, in cui è stato proposto a uno stesso campione di persone 2 problemi di **implicazione logica**, (“*se..... allora*”), con la **stessa struttura** logica, ma dal contenuto **estraneo**, nel primo, e molto più **familiare** nel secondo, riscontrando una percentuale di **successi 5 volte superiore** nella soluzione del secondo problema.

D. Corno e G. Pozzo osservano: “*Il primo caso non è familiare, e i soggetti, non possedendo gli schemi entro cui riportare il problema, possono solo attivare strategie di soluzione di problemi molto generali. Il secondo caso è più vicino a situazioni “reali” di soluzione di problemi. Una volta “capita” la situazione, in quanto codificata in termini di un insieme relativamente ricco di schemi, si possono introdurre i vincoli concettuali degli schemi per risolvere il problema. E’ come se lo schema contenesse già tutti i meccanismi di ragionamento comunemente richiesti nell’uso degli schemi. Capire il problema e risolverlo sono perciò quasi la stessa cosa.*”

I 2 problemi usati nel suddetto esperimento sono gli stessi citati nell'articolo "*Insegnamento muro e ponte*", su L'Educatore, n° 1, a.s. 2008/'09, in cui Mario Castoldi scrive:

"Nel suo bel libro sulla valutazione degli apprendimenti, Maurizio Lichtner presenta, tra gli altri, questi 2 esempi per dimostrare quanto sia diverso l'apprendimento scolastico, fondato su un ordine logico, dall' apprendimento in situazioni di realtà, fondato su un ordine pratico.

1-Hai le seguenti 4 carte. Devi verificare il rispetto della seguente regola: "Se su un lato c'è una vocale, sull'altro deve esserci un numero dispari", voltando il minor numero di carte.

Quali carte volteresti ?

E

M

7

4

2 -E' sera, al grande magazzino l'addetto controlla le operazio-ni della giornata. In particolare deve verificare che, in caso di acquisto superiore a 30 \$, il tagliando deve essere stato firmato sul retro dal responsabile. Quali tagliandi deve voltare per verificarlo?

40 \$

25 \$

Ugo Re

.....

Le 2 situazioni sono basate entrambe su *un'implicazione logica*, e in entrambe si devono voltare la **prima** e l'**ultima** carta o scheda.

Ma il secondo problema è più facile perché è **più intuitivo**. Infatti:

Se **vocale** (E) allora **dispari**; perciò se **non dispari** (4) allora **non vocale**.

Se **più di 30 \$** (40 \$) allora **firma**; perciò se **non firma** allora **non più di 30 \$**.

Implicazione logica non reversibile

La soluzione dei due problemi precedenti si fonda su di un'implicazione logica, che è spesso presente anche nella logica del linguaggio ordinario. Ad esempio

Se **piove** allora ci sono le **nuvole**; perciò, se **non** ci sono le **nuvole** allora **non piove**. Ma **non viceversa**.

Condizione *necessaria ma non sufficiente* perché piova è che ci siano le **nuvole**.

Se PIOVE allora ci sono NUVOLE
se NON ci sono NUVOLE allora NON PIOVE

Se stai a **Roma** allora stai in **Italia**,
perciò, se **non** stai in **Italia** allora **non** stai a **Roma**.

Se è **festa** allora **non c'è scuola**,
perciò se c'è **scuola** allora **non è festa**.

Se **cane** allora **animale**, perciò, se **non animale** allora **non cane**.
Tutti i **cani** sono **animali**, ma **non tutti** gli **animali** sono **cani**.

Se **Ugo** allora **maschio**, perciò, se **non maschio** allora **non Ugo**.
Tutti gli **Ugo** sono **maschi**, ma **non tutti** i **maschi** sono **Ugo**.

Doppia implicazione o coimplicazione logica, reversibile.

La coimplicazione logica già vista non va confusa con la **doppia implicazione o coimplicazione logica** che è reversibile.

Se e solo se respiri allora sei vivo, e viceversa.

Condizione **necessaria e sufficiente** perché tu sia **vivo** è che **respiri**.

Se e solo se RESPIRI \longleftrightarrow allora SEI VIVO

Se e solo se NON RESPIRI \longleftrightarrow allora NON SEI VIVO

Se e solo se tu sei mia madre allora io sono tuo figlio e viceversa.
Perciò se tu **non sei mia madre** allora io **non sono tuo figlio** e viceversa.

Se e solo se oggi è giovedì allora domani è venerdì e viceversa.

Perciò se oggi **non è giovedì** allora domani **non è venerdì** e viceversa.

In uno dei due problemi e negli esempi fatti la comprensione della implicazione e coimplicazione logica è molto facilitata dalla familiarità ed intuitività dei contenuti, appartenenti all'esperienza ordinaria.

Mario **Castoldi**, nell'articolo citato con l'esempio dei 2 problemi, cita **Comoglio** che parla di un insegnamento "**ponte**", un insegnamento **significativo**, con cui si cerca di collegare la conoscenza con la realtà e l'esperienza, e di un insegnamento "**muro**", che invece rende **inerte** la conoscenza. Come afferma **Perkins**: "**La conoscenza inerte si trova in un attico della mente. Si scioglie solo quando in modo specifico è richiamata da un quiz o da una sollecitazione diretta.**"

E come dice Philippe **Perrenoud**, "**La conoscenza non deve essere materia inerte, incapsulata all'interno delle discipline scolastiche, bensì materia viva, da mettere in relazione con le esperienze di vita e i problemi che la realtà pone.**"

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Emma Castelnuovo, *“Didattica della matematica”*, La Nuova Italia

E. Valenti, *“La matematica nella nuova scuola elementare”*, Le Monnier

D.Corno-G. Pozzo, *“Mente, linguaggio, apprendimento”*, La Nuova Italia

Mussen-Conger-Kagan, *“Linguaggio e sviluppo cognitivo”*, Feltrinelli

Guido Petter, *“Psicologia e scuola primaria”*, Giunti

Mosconi-D'urso, *“La soluzione dei problemi”*, Giunti-Barbera '73

Keith Devlin, *L'istinto matematico*, Raffaello Cortina '07

Hans Freudenthal, *“Ripensando l'educazione matematica”*, La Scuola '94

M. Castoldi, *“Insegnamento **muro e ponte**”*, L'Educatore, n° 1, '08/'09