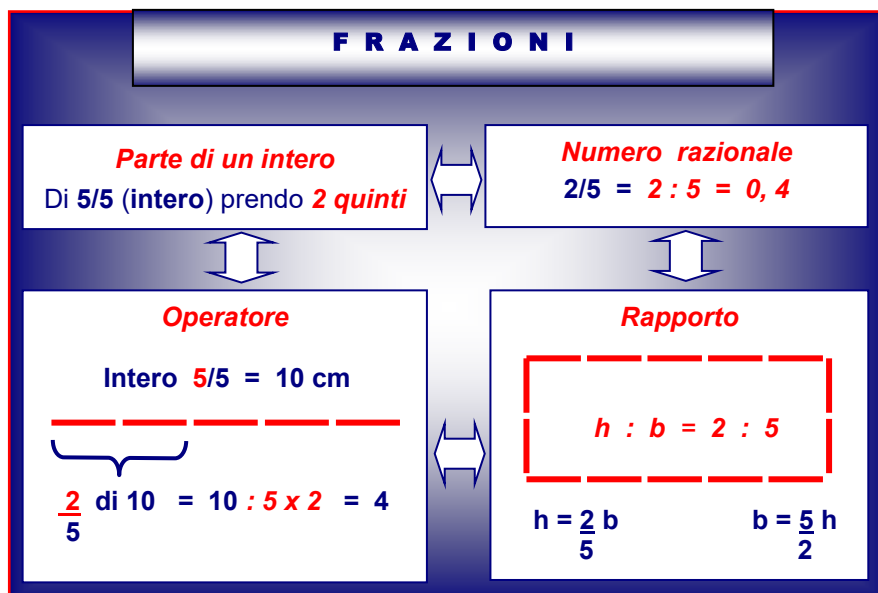


CAPIRE LE FRAZIONI



Il **concetto** di frazione, come evidenziato nello schema, si articola in **4 aspetti** diversi, ma strettamente **interconnessi**.

1 -La frazione come **parte di un intero** è costituita da una o più **unità frazionarie uguali** in cui si suddivide l'intero stesso.

Ad es. dell'intero suddiviso in **5 quinti** uguali si prendono **2 quinti**.

Il denominatore è espresso con la parola "**quinti**" per evidenziare il suo diverso **significato e la sua diversa funzione** rispetto al **numeratore** che invece serve a **quantificare** le unità frazionarie considerate.

2 - Dividendo il numeratore fratto il denominatore (diverso da zero) di una frazione, si ottiene come quoziente un **numero razionale**, che è il rapporto tra numeratore e denominatore, e si può scrivere sia come frazione sia come numero decimale, o anche intero se la frazione è apparente. Ad es. $2/5 = 2$ diviso $5 = 0,4$. Infatti **2** equivale a **20 decimi**, e 20 decimi **diviso 4** fanno **4 decimi**. Oppure $6/2 = 3 = 12/4$ ecc...

3 -La frazione è **un operatore**, che consente di calcolare il valore della frazione di una grandezza, **dividendo** il valore di tale grandezza diviso il **denominatore** e moltiplicando il **risultato per il numeratore**, nei problemi **diretti**; o viceversa, di calcolare il valore di una grandezza conoscendo il valore di una sua frazione, **dividendo** il valore di tale frazione **diviso il numeratore** e moltiplicando il risultato **per il denominatore**, nei problemi **inversi**. Ma si possono risolvere tali problemi anche con la **logica del 3 semplice diretto e riduzione all'unità**.

4 -La frazione può anche indicare **un rapporto**.
Ad es. l'**altezza** di un rettangolo sta alla sua **base** come **2 sta a 5**.
Cioè **$h : b = 2 : 5$** . Da cui **$h = 2/5 b$** , e cioè l'**altezza** è **2 quinti** della **base**, **che è 5 quinti**. Se inverte il rapporto, ottengo **$b = 5/2 h$** , e cioè che la **base** è **5 mezzi** dell'**altezza**, **che è 2 mezzi**.

ABSTRACT

L'angolo al vertice di un triangolo isoscele è $\frac{2}{3}$ dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli? Se l'angolo al vertice è **2 terzi di un angolo alla base**, questo è diviso in 3 terzi come l'altro. La somma dei tre angoli perciò è $(3 \text{ terzi} + 3 \text{ terzi} + 2 \text{ terzi}) = 8 \text{ terzi}$ dell'angolo alla base che misurano 180° . Per calcolare quanto misura 1 terzo dell'angolo alla base, col **3 semplice diretto e riduzione all'unità**, si fa $180 : 8$, poi si moltiplica il risultato per 3 e per 2 (numeratori). È incredibile come tanti, anche laureati, non riescano a capirlo, come ho spesso costatato. Ma basta un aiutino verbale e capiscono subito, **col 3 semplice diretto, che può illuminare, con la luce del significato, il rigore degli algoritmi**. Come dice René Thom: *“Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare.”*

Meglio, se e finché è possibile, un “*pro-f-ec-ondo*” connubio tra i due che può essere mediato con espedienti didattici come sussidi e disegni, verbalizzazioni e scritture significative. Es. $180 : 8 \text{ terzi} = x : 3 \text{ terzi}$ che fa capire meglio la scrittura corretta $180 : \frac{8}{3} = x : 1$ per calcolare l'intero $\frac{3}{3}x$ sapendo che 180 è il valore dei suoi $\frac{8}{3}$ (problema inverso).

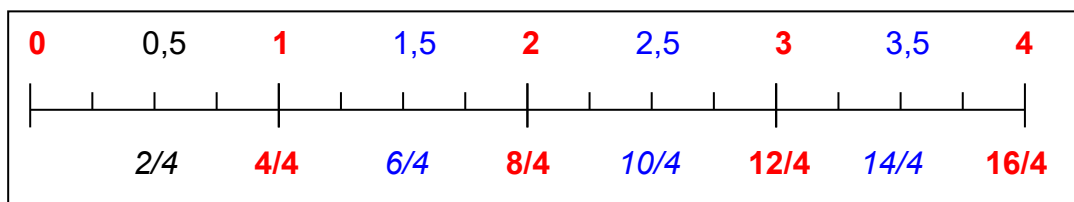
Oppure $x : 2 \text{ quinti} = 20 : 5 \text{ quinti}$ che fa capire meglio $x : \frac{2}{5} = 20 : 1$ per calcolare $x = \frac{2}{5} \text{ di } 20$ (problema diretto). La frazione $\frac{2}{5}$ di 20 implica che 20 è diviso in $\frac{5}{5}$. E per calcolare il valore di $\frac{1}{5}$ di 20, col 3 semplice diretto e riduzione all'unità, si divide $20 : 5$ (numeratore di $\frac{5}{5}$ e non denominatore della frazione-operatore $\frac{3}{5}$).

Per capirlo penso sia importante usare, anche solo oralmente, le frazioni apparenti, ($\frac{5}{5}$, $\frac{3}{3}$ ecc.), che esprimono interi variamente frazionati, espressi invece tutti con 1, a cui le frazioni non apparenti ($\frac{2}{5}$, $\frac{8}{3}$ ecc.) che li implicano, vanno rapportate. Queste invece, di solito, restano isolate, irrelate, come dice la Castelnovo, e come accade anche alla frazione-operatore, ignorando gli interi frazionati. I quali finiscono così per eclissarsi al pari delle frazioni apparenti che li esprimono. Restano latenti, ma è facile “slatentizzarli”.

FRAZIONI

PROPRIE <i>minori di 1 intero</i>	APPARENTI 1 o più interi	IMPROPRIE <i>apparenti + proprie</i> maggiori di 1 o più interi
1 quarto		
2 quarti		
3 quarti		
	4 quarti = 1 intero	
		5 quarti = $\frac{4}{4}$ + $\frac{1}{4}$
		6 quarti = $\frac{4}{4}$ + $\frac{2}{4}$
		7 quarti = $\frac{4}{4}$ + $\frac{3}{4}$
	8 quarti = 2 interi	
		9/4 = $\frac{4}{4}$ + $\frac{4}{4}$ + $\frac{1}{4}$
		10/4 = $\frac{4}{4}$ + $\frac{4}{4}$ + $\frac{2}{4}$
		11/4 = $\frac{4}{4}$ + $\frac{4}{4}$ + $\frac{3}{4}$
	12 quarti = 3 interi	
		13/4 = 3 interi + $\frac{1}{4}$
		14/4 = 3 interi + $\frac{2}{4}$
		15/4 = 3 interi + $\frac{3}{4}$
	16 quarti = 4 interi	
	<i>continua all'infinito</i>	<i>continua all'infinito</i>

Si può riempire qualche altra tabella con la stessa struttura, ma con serie di **frazioni diverse**: ad es. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ ecc.; $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, ecc., per una piena comprensione delle 3 classi di frazioni, che sono anche efficacemente rappresentabili sulla **retta dei numeri**.



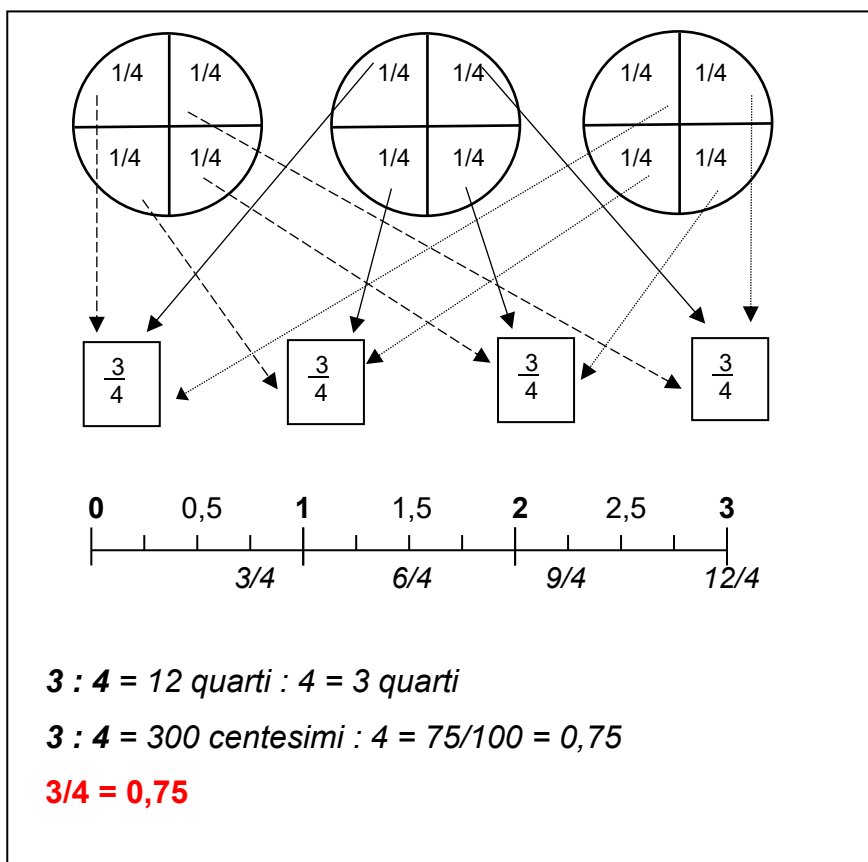
FRAZIONE COME NUMERO RAZIONALE

Voglio *dividere 3 euri tra 4 bambini.*

3 euri sono 12 quarti, che divisi in 4 parti uguali fanno **3 quarti.**

3 euri sono $300/100$, che, divisi in 4 parti uguali fanno $75/100$,

e cioè 0 euri, 7 decimi e 5 centesimi = **0,75**



Se devo dividere **3 diviso 4**, cioè un numero intero diviso un altro numero intero più grande, il risultato è un *numero razionale* (dal latino ratio, rapporto). Esso infatti esprime il **rapporto tra il numeratore e il denominatore** di una frazione, e può avere una parte decimale.

Ogni frazione è un numero razionale e si può esprimere come numero decimale, o intero se la frazione è apparente, ad es. $4/2 = 6/3 = 8/4 = 40/20 = 2$, dividendo il numeratore diviso (fratto) il denominatore (diverso da 0).

1/5 = 1 diviso, fratto 5

1 euro : 5 = **100**/100 : 5 = **20**/100 = 2/10 = 0,2

2/5 = 2 diviso, fratto 5

2 euri : 5 = **200**/100 : 5 = **40**/100 = 4/10 = 0,4

3/5 = 3 diviso, fratto 5

3 euri : 5 = **300**/100 : 5 = **60**/100 = 6/10 = 0,6

4/5 = 4 diviso, fratto 5

4 euri : 5 = **400**/100 : 5 = **80**/100 = 8/10 = 0,8

5/5 = 5 diviso, fratto 5

5 euri : 5 = **500**/100 : 5 = **100**/100 = 10/10 = 1

Molte trasformazioni si possono visualizzare anche con i set delle frazioni, soprattutto con il set lucido, per i centesimi, e con il metro.

SET LINEARE DELLE FRAZIONI

Tavola sinottica. Si può stampare in più copie da dare a ciascun alunno per poterci lavorare, facendo molte equivalenze, anche solo oralmente, da soli o in coppia.

1 INTERO																							
1/2																							
1/4																							
1/16																							
1/8																							
1/24																							
1/12																							
1/6																							
1/18																							
1/9																							
1/3																							
1/15																							
1/5																							
1/10																							
1/20																							
1/4																							
1/2																							
1/8																							
1/24																							
1/3																							

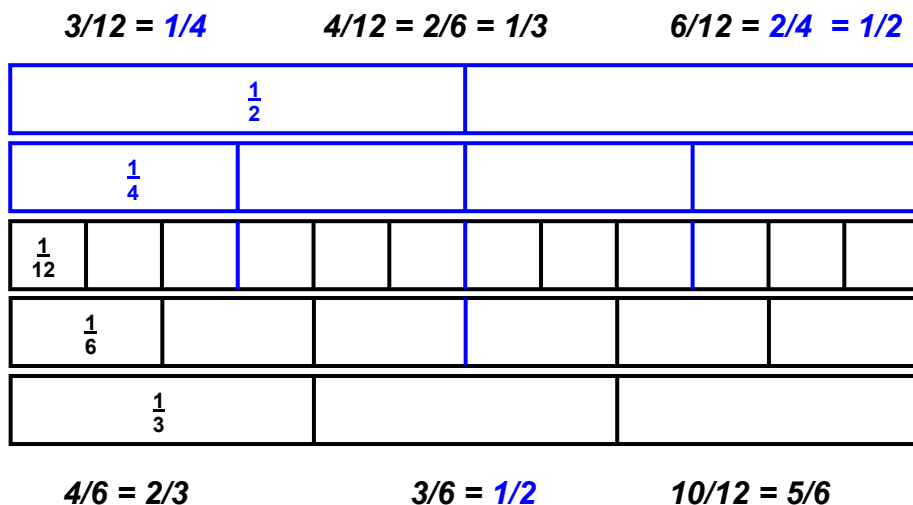
Equivalenze, addizioni e sottrazioni.

Il **set lineare** delle frazioni si compone di **strisce** uguali, frazionate dai $2/2$ fino ai $30/30$, con linee di colore diverso per i denominatori primi di $2/2$ (**azzurro**), $3/3$ (**nero**), $5/5$ (**rosso**), $7/7$ (**violetto**), $11/11$ (**verde**), $13/13$ (**arancio**), e rispettivi **multipli**.

Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: ad es. il **rosso di 5** prevale sull'**azzurro di 2**, ecc.

Con il set lineare si possono visualizzare e capire facilmente **equivalenze e confronti, addizioni e sottrazioni** tra le frazioni, con la **riduzione** ai minimi termini e al minimo comune denominatore, ed altri concetti come la frazione complementare. All'inizio si può lavorare con le **singole strisce** separate, spostandole. Poi anche solo osservando le frazioni in **tavole sinottiche**, che si possono stampare per **ciascun alunno**.

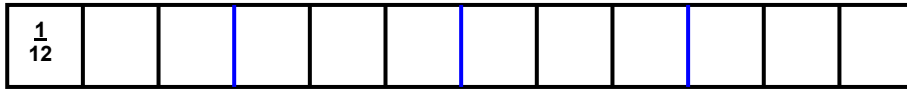
Equivalenza di frazioni e riduzione ai minimi termini.



Addizioni, sottrazioni e scomposizioni di frazioni con denominatore uguale

$$4/12 + 3/12 = 7/12$$

$$9/12 - 5/12 = 4/12 = 1/3$$



$$10/12 = 6/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 = \text{ecc...}$$

$$1 = 12/12 = 8/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 + 2/12 = 4/12 \text{ per } 3 \text{ ecc.}$$

Addizioni e sottrazioni di frazioni con denominatore diverso e da ridurre ai minimi termini



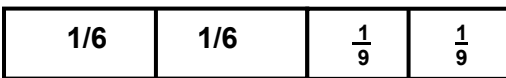
$$6/18 + 4/20 =$$



$$= 3/9 + 2/10 =$$



$$= 1/3 + 1/5 = 5/15 + 3/15 = 8/15$$



$$2/6 + 2/9 =$$



$$= 1/3 + 2/9 = 3/9 + 2/9 = 5/9$$



Negli esempi fatti si capisce chiaramente perché bisogna ridurre ai **minimi termini** e al **minimo comune denominatore** frazioni con denominatore diverso per poterle addizionare o sottrarre.

Le operazioni e i concetti vengono facilmente compresi e consolidati mediante le **illustrazioni** e l'**applicazione** in esercizi pieni di **significato**. Sarà poi molto più facile capire le **regole generali** e l'uso dei **simboli astratti**, con numeri più grandi. Gli **esempi didattici** fatti sono ovviamente limitati e indicativi, per una eventuale utilizzazione critica da parte degli insegnanti, con gli opportuni adattamenti. Molti esempi si riferiscono soprattutto a obiettivi e contenuti della scuola secondaria di primo grado, ma ci sono anche utili spunti per un lavoro più semplice a partire dalla classe terza o quarta della scuola primaria.

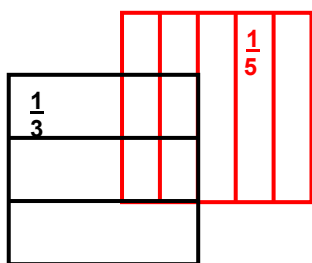
SET LUCIDO TRASPARENTE DELLE FRAZIONI

Le *matrici* da stampare su *lucidi trasparenti* e ritagliare, e l'*animazione al computer*, anche del SET LINEARE, si trovano nel sito www.monachesi.it

Il “*set lucido delle frazioni*” si compone di **quadrati lucidi trasparenti** uguali, frazionati o in un solo senso o in entrambi i sensi, dai $2/2$ fino ai $100/100$, con linee di **colore diverso** per i denominatori **primi** di $2/2$ (*azzurro*), $3/3$ (*nero*), $5/5$ (*rosso*), $7/7$ (*violetto*), e rispettivi **multipli**. Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: il *violetto di 7* prevale sul *rosso di 5* che prevale sul *nero di 3* che prevale sull'*azzurro di 2*.

Prodotto di frazioni

Il **prodotto** di frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 quadrati del set raffiguranti le 2 frazioni da moltiplicare, frazionati, uno in senso verticale e l'altro in senso orizzontale. Esempio:



$$2/3 \times (\text{di}) 2/5 = 4/15$$

$$2/5 \times (\text{di}) 2/3 = 4/15$$

Se sovrappongo $3/3$ su $5/5$ visualizzo

$$3/3 \times 5/5 = 15/15$$

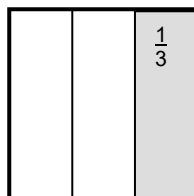
Problema (Prova nazionale INVALSI 2008 per l'esame di terza media)

Un padre e i suoi 4 figli si dividono la cifra vinta al lotto in questo modo: al padre spetta $\frac{1}{3}$ dell'intera somma, e il rimanente viene diviso in parti uguali tra i figli. Quale parte della somma spetta a ciascuno dei figli?

Soluzione

L'intera somma è **3 terzi**. Se il padre ne prende **1 terzo** ai 4 figli ne restano **2 terzi**.

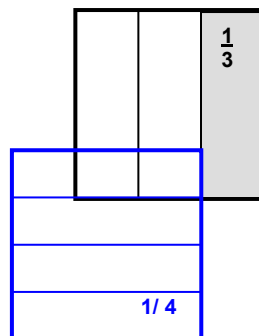
$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Poiché i figli sono 4, per trovare la parte che spetta a ciascuno di essi, si divide la parte rimasta, cioè **2 terzi**, in **4 parti** uguali, trovando **1 quarto di 2 terzi** che è uguale a **2 dodicesimi**,

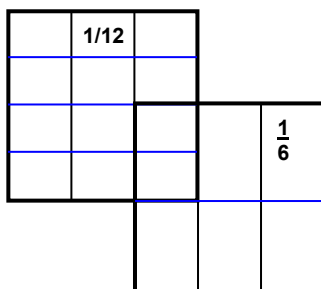
1 quarto di 2 terzi = 2 dodicesimi

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$



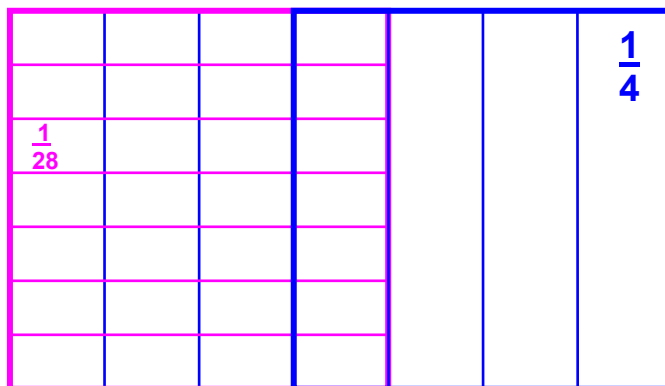
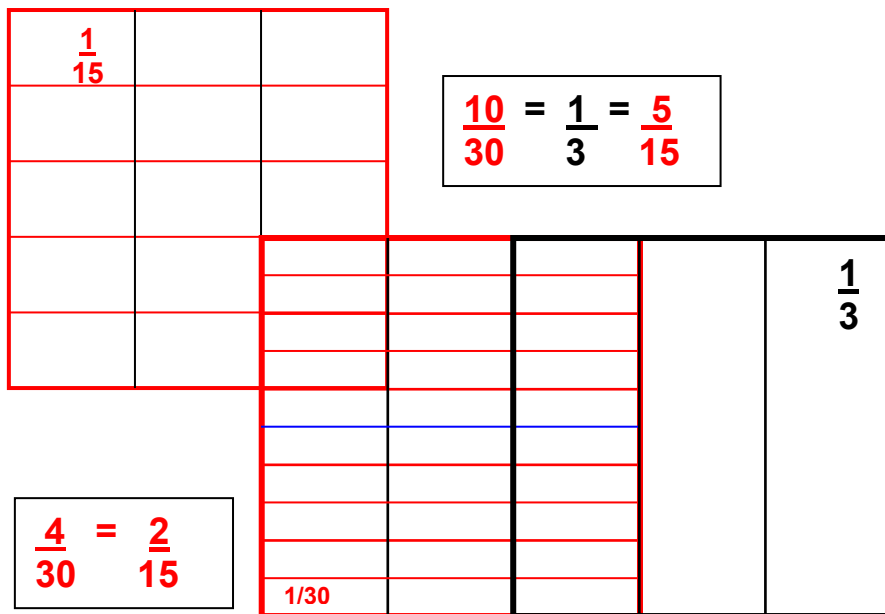
Il risultato **2 dodicesimi** è equivalente a **1 sesto**

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$



Equivalenza tra frazioni.

Si può visualizzare sovrapponendo 2 frazioni equivalenti raffigurate in 2 quadrati lucidi trasparenti del set lucido, frazionati in un solo senso e/o in entrambi i sensi.



$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

“Giocare a carte” con le frazioni

Con i quadrati del **set lucido concreto** si possono fare le equivalenze anche “*giocando a carte*”, tra 2 o più alunni, dividendosi in ugual numero i quadrati del set come “carte” da gioco. Poi ognuno gioca un quadrato e gli altri possono “*prenderne*” uno giocato se possono farci un’**equivalenza** con un quadrato che ha in mano: *es. 3/3 prende 18/18, ma non 5/5, ecc....L’intero*, equivalente a **tutte le carte**, le prende tutte e viene preso da tutte.

$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{3}$

Il quadrato **3 terzi (nero)** prende il quadrato **5 quindicesimi** e viceversa

Il SET LUCIDO è **brevettato** ed è stato pubblicato da:

1 -RAFFAELLO editrice, Monte San Vito, Ancona 1993.

2 -BREVETTO n.° 00232006 del 10 / 8 / '99.

3 -RIVISTA “L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate”, n° 3, maggio '07. Centro ricerche didattiche UGO MORIN.

“Calcolo mentale” con le frazioni

I due set, come altri sussidi, possono servire per “spiegare”, ma anche e soprattutto per farci lavorare gli alunni, guidati all’inizio dall’insegnante. Essi consentono di fare con facilità, anche solo **oralmente**, equivalenze e operazioni con le frazioni, e cioè il **calcolo mentale** con le frazioni. Tale attività sottende **altri concetti**, come quelli di **frazione complementare e propria, impropria e apparente**. Nel calcolo mentale con le frazioni essi vengono acquisiti in modo **implicito**, operando: sarà poi facile esplicitarli. Infatti si visualizzano sempre **l’intero** e le sue **unità frazionarie**, operando con esse, sia entro l’intero (es. $1/5 + 2/5 = 3/5$), sia oltre l’intero (es. $3/5 + 4/5 = 7/5 = 1 \text{ intero} + 2/5$), ecc. E lo si fa comprendendone pienamente il significato. Infatti si fanno addizioni e sottrazioni con i **numeratori** che quantificano le **unità frazionarie** uguali, facendo prima l’equivalenza se sono diverse, visualizzando uno stesso denominatore comune, capendo e consolidando così in modo intuitivo anche il loro rapporto con l’intero. Anche quando si fa ad es. **2 dm. + 5 cm.** si addizionano **20 centesimi + 5 centesimi di 1 metro**. E’ un lavoro semplice ed efficace, ma per lo più estraneo alla pratica didattica perché si ritiene che le **operazioni** con le **frazioni** si debbano fare in **forma simbolica scritta** alla scuola secondaria di primo grado, con le regole ben note, magari spiegandole con qualche esempio concreto. Il quale però, spesso non basta per una **comprensione più significativa e consolidata**, come invece avviene lavorando con i set concreti. Essi rendono facili, familiari e “simpatiche” le frazioni stesse, come dicevano i miei alunni, perché nel farci il **calcolo mentale oralmente** esse vengono visualizzate, capite e nominate spesso, facendoci “**confidenza.**”

Gli alunni possono lavorare con i set, prima con la **guida dell'insegnante**, poi anche in modo **autonomo, anche in coppia**, aiutandosi, inventando equivalenze e operazioni, anche **solo oralmente** ed in tempi limitati. L'importante è che facciano **lavorare il cervello, verbalizzando le equivalenze e le operazioni**.

L'insegnante può seguire gli alunni mentre lavorano, aiutando chi ne avesse bisogno, senza dover correggere tanti esercizi diversi, qualora fossero anche scritti. All'inizio si può lavorare un po' con le **frazioni più semplici** e con le **single strisce** del set lineare o i **quadrati trasparenti del set lucido**. Poi anche soltanto osservando le frazioni nella **tavola sinottica** completa del set lineare, o in **più tavole sinottiche** ridotte, che si possono stampare per ciascun alunno.

Ovviamente i due set vanno usati in modo **graduale** secondo le capacità degli alunni, per riuscire poi più facilmente a lavorare anche con i simboli astratti capendone il significato, con un **processo di graduale astrazione**, che consentirà di capire senza più l'uso di sussidi concreti.

Consolidare concetti e conoscenze: esercizi significativi.

Con i set si può rappresentare la soluzione di **alcuni problemi**, come già visto, e si possono fare **“esercizi”** molto utili perché significativi, come dice Hans **Freudenthal**. Egli sostiene **l'utilità degli esercizi** che consentono di **approfondire e consolidare le intuizioni e la comprensione** dei concetti e dei ragionamenti nella soluzione dei problemi. *“Ma vi è un modo di fare esercizio (incluso anche lo studio a memoria), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al tesoro dell'intuizione: si tratta dell'esercizio accoppiato con l'apprendi-mento per intuizione.”* (*“Ripensando l'educazione matematica”*, pag. 150).

Michele Pellerey, su *“Orientamenti Pedagogici”*, n° 3/’85, *“Verso una nuova stagione per la scuola?”*, evidenzia l’importanza delle **conoscenze capite e consolidate**: *“La psicologia cognitivista ha rilevato il ruolo decisivo che gioca in tutto questo il quadro concettuale posseduto, l’insieme cioè dei fatti, delle idee, dei principi, dei procedimenti resi propri in maniera significativa e coerentemente compaginata. Per risolvere problemi, per fare ricerche, per leggere e capire, per seguire i ragionamenti, ecc.... Non basta essere intelligenti, si deve anche sapere, e sapere le cose in modo chiaro e pertinente.”*

Di solito la comprensione e l’apprendimento non avvengono con la modalità del *“tutto o niente”*, come spiega **Guido Petter**, ma richiedono **approfondimenti progressivi**. **Hans Aebli** infatti scrive: *“Le strutture mentali che il bambino costruisce col processo di elaborazione non hanno per nulla quella consistenza quasi concreta che Piaget ad esse attribuisce. (Ma anche Piaget parla di “decalages”, “scarti”, regressioni: n.d.a.). Appena in un processo appaiono fattori di maggiore difficoltà, l’operazione arretra a un livello strutturale più basso. Ciò dimostra quanto sia importante che i risultati di un processo di elaborazione vengano in qualche modo consolidati con adeguati esercizi e applicazioni.”*

FRAZIONE COME OPERATORE

La frazione è un **operatore** che consente di calcolare il valore della frazione di un intero dal valore noto (**problema diretto**), e viceversa, di calcolare il valore di un intero conoscendo il valore di una sua frazione (**problema inverso**). Ad es., con la frazione *3/5 come operatore* si possono risolvere i 2 problemi seguenti.

1 - Problemi diretti e inversi risolti con la frazione-operatore

Problema diretto - Calcolare i *3/5* di 20.

La regola dice che si divide il valore 20 dell'intero **diviso** il **denominatore 5** e si **moltiplica** il risultato, 4, per il **numeratore 3**, ottenendo 12.

$$20 : 5 \text{ (denominatore)} = 4$$

$$4 \times 3 \text{ (numeratore)} = 12 \text{ (Valore dei } 3/5 \text{ di } 20)$$

Problema inverso - Il valore dei *3/5* di un intero è 12.

Calcolare il valore dell'intero.

La regola dice che si divide il valore 12 della frazione *3/5* **diviso** il **numeratore 3** e si **moltiplica** il risultato, 4, per il **denominatore 5**, ottenendo 20.

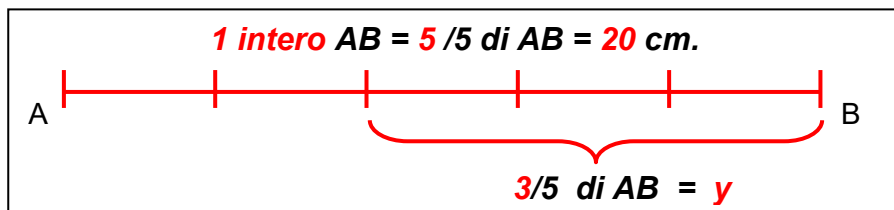
$$12 : 3 \text{ (numeratore)} = 4$$

$$4 \times 5 \text{ (denominatore)} = 20 \text{ (Valore dell'intero } 5/5)$$

2 - Problemi diretti e inversi risolti con la logica del 3 semplice diretto e riduzione all'unità

I problemi suddetti si possono risolvere anche con la logica del tre semplice diretto visualizzata in un **segmento frazionato**, operando **con i soli numeratori variabili**.

Problema diretto: Calcolare i $3/5$ di 20 (che è il valore di **5** quinti)



Il testo implica che **20** è il **valore dell'intero $5/5$** . Il quale si può rappresentare con un segmento diviso in 5 parti uguali: esse non sono espresse nel testo verbale, che però le implica, e sono da inferire.

Per calcolare il valore di $1/5$ si fa

$$20 : 5 \text{ (numeratore di } 5/5) = 4$$

Infatti i quinti dell'intero sono 5, quantificati dal **numeratore 5** della frazione apparente $5/5$, che esprime l'intero frazionato, non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita.

Per calcolare poi il valore di 3 quinti si fa

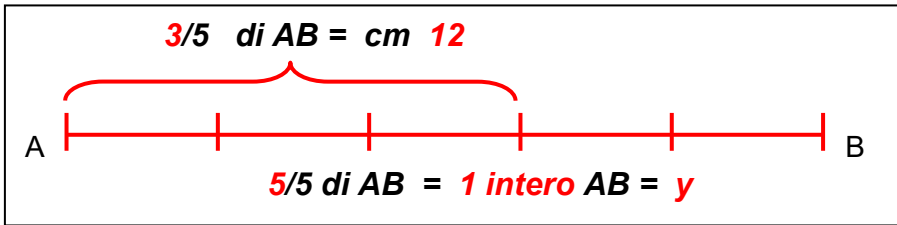
$$4 \times 3 \text{ (numeratore di } 3/5) = 12.$$

Perciò, con la logica del **3 semplice diretto** e la riduzione all'unità si opera **con i soli numeratori**.

$$20 : 5 \text{ (numeratore di } 5 \text{ quinti)} = 4$$

$$4 \times 3 \text{ (numeratore di } 3 \text{ quinti)} = 12$$

Problema inverso: I $\frac{3}{5}$ di un segmento misurano **12 cm.
Quanto misura l'intero segmento?
 (Che è composto di **5 quinti**)**



Poiché il valore di **3** quinti è 12,
 per calcolare il valore di **1** quinto si fa
 $12 : 3$ (numeratore di **3** quinti) = 4.

Per calcolare poi il valore dell'intero **5** quinti si fa
 4×5 (numeratore di **5** quinti) = 20.

$$12 : 3 \text{ (numeratore di 3 quinti)} = 4$$

$$4 \times 5 \text{ (numeratore di 5 quinti)} = 20$$

I quinti dell'intero, infatti, sono 5, quantificati dal **numeratore 5 della frazione $\frac{5}{5}$** , non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita. Perciò, con la logica del 3 semplice diretto e la riduzione all'unità si opera anche per i problemi inversi con i **soliti numeratori**.

Le **operazioni e i numeri sono sempre gli stessi** in entrambi i procedimenti: quello che cambia è il significato di uno dei numeri, es. 5, negli esempi già visti. Nella regola della **frazione-operatore** per problemi diretti e inversi, infatti, **5 è sempre il denominatore di $\frac{3}{5}$** . Nella logica del **3 semplice diretto** **5 è sempre il numeratore di $\frac{5}{5}$** .

Con la logica del **3 semplice diretto 5** è sempre il **numeratore** della **frazione apparente (es. 5 quinti)** che esprime l'intero.

Essa non è esplicitata nel testo, che però la implica, si inferisce, cioè si capisce, e si può verbalizzare e scrivere per capirla meglio.

Essa invece **si vede benissimo** quando si rappresenta il problema con **un segmento frazionato**. In questo, infatti, si visualizzano le parti uguali, non solo della **frazione (es. 3/5)** espressa nel testo, ma anche della **frazione apparente (es. 5/5)** che esprime l'intero frazionato, non espressa nel testo, da inferire e verbalizzare. Nel segmento frazionato, **le parti uguali (es. 5 quinti)** in cui esso è suddiviso, e quelle di una **sua frazione (es. 3 quinti)**, sono tutte ben visualizzate e indicate dai **numeratori (es. 5 e 3)**, in rapporto con le misure corrispondenti, di cui una nota e l'altra da calcolare. Per “spiegare” tali problemi si usa spesso un **segmento intero frazionato**, in cui è presente e ben visualizzata la logica del **3 semplice diretto**. Ma poi si enuncia e si insegna la **regola della frazione-operatore**, per risolvere i **problemi diretti e inversi con le frazioni**, perché le **operazioni e i numeri sono sempre gli stessi**. Infatti il numeratore (es. 5) della frazione apparente che esprime l'intero (es. 5/5) è uguale al suo denominatore (es. 5): si può dire che fanno un tutt'uno. Ma è il **numeratore 5, “cardinale”, che quantifica le parti** di cui si compone l'intero, mentre il denominatore “**quinti, ordinale**” serve per denominarle.

Problema: *settimana corta dell'età.*

Senza contare i sabati e le domeniche io avrei 50 anni. Quanti anni ho io in tutto contando anche i sabati e le domeniche ?

Questo problema riguarda un *contenuto molto familiare* ed è formulato con un *linguaggio ordinario* diverso da *quello matematico*. Ciò può aiutare a capire meglio, ma può anche disorientare chi non è abituato a collegare il linguaggio matematico con quello ordinario,

Soluzione

La prima idea che di solito viene in mente è quella di calcolare tutti i giorni tolti in 50 anni, per poi trasformarli in anni e aggiungerli ai 50 anni dati, moltiplicando 2 giorni per le 52 settimane di ogni anno, per 50 anni. Tale intuizione è valida ma richiede un ragionamento più difficile di quello molto più semplice che segue.

Considero che **1 giorno è 1 settimo** di un'intera settimana, che è formata da **7 settimi**. Senza il sabato e la domenica prendo 5 giorni per ogni settimana, cioè **5 settimi**, che corrispondono a **50 anni** dell'età totale. Si deve perciò **calcolare il valore dell'intero 7/7 conoscendo il valore 50 di 5/7**: è quindi un problema **inverso** con le frazioni.

$$1 \text{ settimo dell'età totale} = 50 : 5 = 10 \text{ anni}$$

$$7 \text{ settimi} = 10 \times 7 = 70 \text{ anni in tutto}$$

Se pongo $y = \text{età totale}$ posso impostare la proporzione:

$$50 : 5 = y : 7 \quad \text{da cui} \quad 5y = 50 \times 7$$

$$\text{ed infine} \quad y = 50 : 5 \times 7 = 10 \times 7 = 70$$

Proporzionalità diretta e **3 semplice diretto**.

Il valore di una frazione non dipende dal *denominatore costante*, ma dai *numeratori variabili*, che quantificano le unità frazionarie (es. i quinti). Se queste diventano doppie, triple, quadruple ecc., lo diventano anche i valori delle rispettive frazioni, il cui valore perciò è *direttamente proporzionale alla quantità delle unità frazionarie quantificate dai numeratori*.

Problema diretto	
Calcolare i $3/5$ di 20	
1 quinto di 20 = $0,2 \times 20 = ?$	↓
2 quinti di 20 = $0,4 \times 20 = ?$	
<u>3 quinti di 20 = $0,6 \times 20 = y$</u>	
4 quinti di 20 = $0,8 \times 20 = ?$	
<u>5 quinti di 20 = $1 \times 20 = 20$</u>	
6 quinti di 20 = $1,2 \times 20 = ?$	
Ecc...	
$5/5 : 20 = 3/5 : y$	

Problema inverso: 12 è i $3/5$ di un numero n. Calcolare n.	
1 quinto di n = $0,2 \times n = ?$	↓
2 quinti di n = $0,4 \times n = ?$	
<u>3 quinti di n = $0,6 \times n = 12$</u>	
4 quinti di n = $0,8 \times n = ?$	
<u>5 quinti di n = $1 \times n = n$</u>	
6 quinti di n = $1,2 \times n = ?$	
Ecc...	
$3/5 : 12 = 5/5 : n$	

I problemi, sia diretti che inversi, perciò, si possono risolvere dividendo il valore noto di una frazione, compresa quella apparente che esprime l'intero frazionato, (es. $5/5$), *diviso il suo numeratore*, e moltiplicando il risultato *per il numeratore* della frazione, compresa $5/5$, di cui si vuol trovare il valore, con il *3 semplice diretto* e la *riduzione all'unità*. In tal modo si opera con *soli numeratori* (es. *3 e 5*) di due frazioni, (es. $3/5$ e $5/5$), mentre con la *frazione-operatore* si opera con il *numeratore e il denominatore* di una sola frazione (es. $3/5$). Si fanno le stesse operazioni con gli stessi numeri, con un significato, però, in parte diverso che con il *3 semplice* mi sembra più chiaro.

Il **problema diretto** si risolve anche con la proporzione **$1 : 20 = 3/5 : y$** .
Per capire meglio, come espediente didattico, si può scrivere
 $5 \text{ quinti} : 20 = 3 \text{ quinti} : y$.

E per il **problema inverso**, **$3 \text{ quinti} : 12 = 5 \text{ quinti} : n$** .

Si evidenziano così i **due numeratori 3 e 5 che determinano il valore delle due frazioni**. E si scrive anche la frazione apparente *5 quinti*, cosa che non si fa mai perché le frazioni apparenti che esprimono l'intero frazionato si riducono tutte a 1, rischiando così di perderne la cognizione come frazioni, che si possono eclissare nella mente, rendendo più difficile capire e risolvere i problemi in modo logico e significativo, e molto più facile applicare regole mnemoniche.

3-Problema senza l'intero - *7/5 di un segmento misurano 28 m. Quanto misurano i 3/5 dello stesso segmento?*

1 quinto di AB = ?

2 quinti di AB = ?

3 quinti di AB = y

4 quinti di AB = ?

5 quinti di AB = ?

6 quinti di AB = ?

7 quinti di AB = 28

8 quinti di AB = ?

Ecc....



$$7 \text{ quinti} : 28 = 3 \text{ quinti} : y$$

1-Soluzione con la logica del 3 semplice diretto

Nel problema in tabella non si fa alcun riferimento all'intero, ma soltanto a due frazioni di esso, $3/5$ e $7/5$, con lo stesso denominatore. Ragionando con la logica del 3 semplice diretto e la riduzione all'unità,

-per calcolare il valore di **1 quinto** si divide $28 : 7 = 4$

-per trovare valore di **3 quinti**, si moltiplica $4 \times 3 = 12$

-In sintesi $28 : 7 \times 3 = 12$

2-Soluzione con la regola dei problemi diretti e inversi

Se no, con la regola della frazione-operatore, tale problema risulta composto da **2 problemi**, uno inverso e l'altro diretto.

Infatti prima si deve calcolare il **valore dell'intero 5/5** conoscendo il valore 28 dei suoi 7/5, facendo **$28 : 7 \times 5 = 20$** .

Poi il valore dei **3/5 dell'intero**, facendo **$20 : 5 \times 3 = 12$** .

In sintesi, **$28 : 7 \times 5 : 5 \times 3 = 28 : 7 \times 3 = 12$**

Sono le **stesse operazioni** con gli **stessi numeri** e lo stesso risultato della soluzione precedente, ma il procedimento è più lungo e mnemonico.

3-Soluzione con la proporzione

Le stesse operazioni si ottengono anche usando il linguaggio formale delle proporzioni: **$28 : 7/5 = y : 3/5$**

da cui **$7/5y = 28 \times 3/5$**

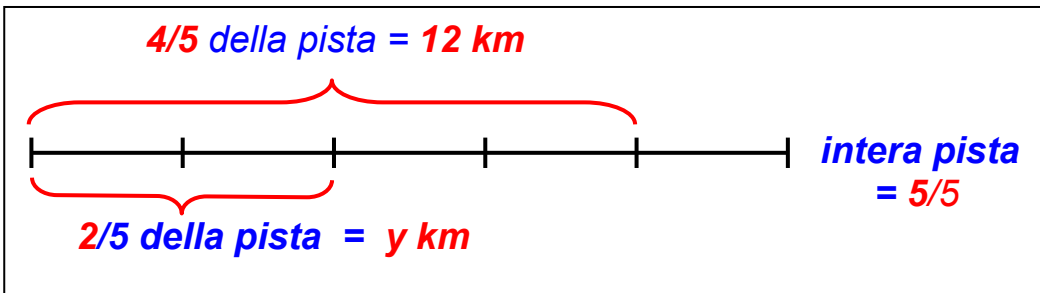
ed infine **$y = 28 \times 3/5 : 7/5 = 28 \times 3/5 \times 5/7 =$**

$= 28 \times 3 : 5 \times 5 : 7 = 28 \times 3 : 7 = 28 : 7 \times 3 = 12$

Problema

Anche il problema seguente ha la **stessa struttura logica** di quello già visto, e si risolve facilmente in modo intuitivo.

Giorgio ha percorso in bicicletta 12 km che sono i $\frac{4}{5}$ di una pista ciclabile, mentre il suo cucciolo, rincorrendolo, ne ha percorsi i $\frac{2}{5}$. Quanti km ha percorso il suo cucciolo?



1- Soluzione con la logica del 3 semplice diretto

Se 4 quinti della pista sono lunghi 12 km, 1 quinto della pista sarà lungo $12 \text{ km} : 4 = 3 \text{ km}$.

2 quinti della pista sarà lunga $3 \text{ km} \times 2 = 6 \text{ km}$

In sintesi $12 : 4 \times 2 = 6$

2 - Soluzione con la regola codificata dei problemi diretti e inversi

Con la frazione-operatore, il problema risulta composto da un *problema inverso* e uno *diretto*, e si deve calcolare:

-prima il **valore di $\frac{5}{5}$** della intera pista: $12 : 4 \times 5 = 15$;

-poi il **valore dei suoi $\frac{2}{5}$** , cioè $15 : 5 \times 2 = 6$.

In sintesi: $12 : 4 \times 5 : 5 \times 2 = 12 : 4 \times 2 = 6$

Sono le **stesse operazioni con gli stessi numeri** e lo stesso risultato, ma il procedimento è più lungo e mnemonico

3-Soluzione con la proporzione

Le stesse operazioni si ottengono anche usando il linguaggio formale delle proporzioni: $12 : 4/5 = y : 2/5$

da cui $4/5y = 12 \times 2/5$

ed infine $y = 12 \times 2/5 : 4/5 = 12 \times 2/5 \times 5/4 =$

$= 12 \times 2 : 5 \times 5 : 4 = 12 \times 2 : 4 = 12 : 4 \times 2 = 6$

La prima soluzione si capisce meglio, e potrebbe illuminare in parte anche le altre due.

Un “*pro-f-ec-ondo*” connubio tra rigore e significato.

Nella prima soluzione basata sulla logica del 3 semplice diretto, si tiene conto del diverso significato e della diversa funzione del denominatore e del numeratore, e si esclude il denominatore dai calcoli.

Il significato di $3/5$ è espresso dalle parole con cui si verbalizza, che di solito sono “*tre quinti.*” Il denominatore è un *numero ordinale (quinti)*, ma si scrive, si pronuncia e si usa nei calcoli come *numero cardinale (5)*, in modo ambiguo, e ciò può confondere. Ma si può anche verbalizzare “*tre su cinque*”, e cioè “*3 quinti su 5 quinti.*” In tal caso 5 è il numeratore della frazione *5 quinti*, che esprime l'intero: è un *numero cardinale*, come il numeratore 3 della frazione *3 quinti*. Come già detto è così che gli egiziani esprimevano le frazioni, con un linguaggio più appropriato: ed è il linguaggio, più o meno chiaro, che indirizza il pensiero, più o meno bene, come osserva Emma Castelnuovo. La verbalizzazione dei simboli e dei numeri, infatti, ne esprime e precisa i significati, sui quali si fonda il ragionamento. E tenendo conto di tali significati si possono trovare procedure diverse, come già visto, da quelle previste dalle regole.

Queste ovviamente sono importanti e vanno apprese bene perché sono alla base del linguaggio formale matematico, a livelli di astrazione, rigore e complessità sempre maggiori. E col crescere di tali livelli, l'intuizione del significato diventa sempre più difficile ed impossibile. Ma, come dice René Thom, si deve curare il più possibile anche la comprensione del significato ed il riferimento e l'applicazione della matematica alla realtà, per evitare il verbalismo ed il formalismo astratti e mnemonici, alimentando il pensiero con il carburante del significato.

Se si verbalizzano i simboli matematici, rappresentando anche concretamente i concetti che essi esprimono, se ne comprende meglio il significato. Ciò consente di ragionare, come già visto, in base al significato stesso, con un approccio “*analogico-semantic*”, più intuitivo, aperto anche a percorsi diversi, ma che vanno poi ricondotti sui rigorosi “*binari*” del linguaggio formale. Che però in tal modo sarà più significativo. Il linguaggio formale ha una sua sintassi, dal rigore assoluto e di potenza straordinaria, con il rischio però di apparire agli alunni “*un gioco astratto di simboli formali*”, senza capirne il significato ed il collegamento con la realtà. Ciò in parte è inevitabile e normale, specialmente ai livelli più alti e complessi, ma come dice il matematico René Thom, già citato: “*Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare.*”

Ovviamente la cosa migliore è cercare di realizzare un “*pro-f-ec-ondo*” *connubio tra rigore e significato*, lasciando che il significato stesso, finché è possibile, possa illuminare e motivare il ragionamento, senza però smarrire mai la strada maestra delle regole del linguaggio formale, come si è cercato di fare con i problemi considerati.

In particolare bisogna sempre evitare che si formino concetti errati o *misconcezioni*, che potrebbe essere poi difficile rimuovere e rettificare.

Problema: il volo del calabrone (di Gamow)

Due treni partono contemporaneamente da due stazioni A e B, distanti 160 km, e si dirigono l'uno verso l'altro alla velocità di 80 km all'ora. Un calabrone parte nello stesso istante da A e va verso B seguendo i binari ad una velocità di 100 Km all'ora.

Quando incontra il treno proveniente da B si spaventa, inverte la rotta e vola verso A. Vola così avanti e indietro da un treno all'altro, finché questi si incrociano e il calabrone fugge via.

Qual è la distanza totale percorsa dal calabrone nei suoi andirivieni?

Soluzione - Anche in tale problema è possibile una soluzione semplicissima, direi tautologica, basata sul significato del testo. Altrimenti sarebbe necessario ricorrere all'algoritmo della *progressione geometrica*. Poiché i 2 treni corrono ciascuno a 80 km l'ora, dopo un'ora avranno percorso fra tutti e due 160 km e quindi, essendo partiti a 160 km di distanza, si incroceranno. Poiché il calabrone ha volato per tutto quel tempo, cioè per un'ora, a 100 km l'ora, avrà percorso 100 km.

Vittorio Duse osserva:

“Se ci si prova a risolvere il problema seguendo i singoli voli e le singole virate del calabrone, si trova la stessa risposta come somma di una progressione geometrica di ragione 1/9, ma con un procedimento molto più complesso. Anche ammettendo che una macchina possa risolvere tale problema, lo farà solo dopo aver avuto dall'uomo le opportune istruzioni e col metodo più meccanico e lungo. Ma nella mente dell'uomo cos'è che muove il pensiero in primo luogo verso la risoluzione e poi verso un tipo di risoluzione piuttosto che verso un altro? “ (V. Duse, ”Per un insegnamento moderno della matematica elementare”, La Scuola)

E se le due stazioni fossero state distanti 200 km? In tal caso i 2 treni si sarebbero incontrati dopo 1 ora e 1 quarto, e in tale tempo il calabrone, volando a 100 km all'ora, avrebbe percorso 125 km.

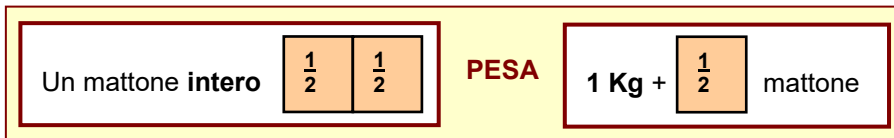
Problema: *il peso del mattone*

Il testo del problema che segue è formulato in modo da trarre in inganno, con un **uso fuorviante delle parole**, che inducono a pensare in modo errato, cortocircuitando il ragionamento logico, e a rispondere: 1 e mezzo.

*Un mattone pesa **1Kg più mezzo mattone**: quanto pesa il mattone?*

Soluzione

Il testo è un'equazione verbale: rappresentata con il disegno è molto più intuitiva e facilita la soluzione.



Si vede infatti chiaramente che, nel secondo membro, al posto di mezzo mattone c'è 1 kg. Perciò

1 mezzo del mattone = 1 Kg,

2 mezzi del mattone, (cioè 1 mattone intero) = 2 Kg

Con l'equazione e il linguaggio formale

pongo $y = \text{peso del mattone}$

$$y = 1 + \frac{1}{2} y$$

$$y - \frac{1}{2} y = 1$$

$$\frac{1}{2} y = 1$$

$$y = 1 : \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 2$$

FRAZIONE COME RAPPORTO e PROBLEMI DEL 3° e 4° TIPO

Mi è capitato più volte che ragazzi di prima media sono venuti da me perché non riuscivano a risolvere problemi come quello che segue:

Problema

Un rettangolo ha l'altezza che è $\frac{3}{5}$ della base e il suo perimetro è di 6 metri. Quanto misurano la base e l'altezza? E l'area?



Altezza = 3 quinti della base

Base = 5 quinti

E' un problema "del terzo tipo" con le frazioni, dopo quelli *diretti e inversi*, già visti. I problemi del terzo tipo con le frazioni sono quelli in cui si conosce la somma del valore di due grandezze e il loro rapporto, e si deve calcolare il valore di ciascuna delle due grandezze.

Nel problema considerato abbiamo la somma delle misure della *base + altezza = 32*, calcolata dividendo a metà il perimetro 64; e il loro rapporto, *altezza = $\frac{3}{5}$ della base*.

La regola dice che, per calcolare il valore della base e dell'altezza, si divide la somma delle loro misure, 32, diviso la somma, 8, del numeratore, 3, più denominatore, 5, della frazione, $\frac{3}{5}$, che ne esprime il rapporto. Ma non si capisce cosa significhi questo 8: otto che cosa?

Poi, per calcolare la misura dell'altezza, si moltiplica il risultato, 4, per il numeratore, 3, della frazione $3/5$, ottenendo 12, misura dell'altezza. E per calcolare la misura della base si moltiplica *4 per il denominatore 5 di $3/5$* , ottenendo 20, misura della base.

Ma anche qui non si capisce perché si moltiplica *4 per il denominatore 5*, che serve per denominare le parti uguali e non a quantificarle. Poi è facile calcolare l'area.

In base alla regola perciò si fa:

$$64 \text{ m} : 2 = 32 \text{ m} \text{ (base + altezza = semiperimetro)}$$

$$3 + 5 = 8 \text{ (numeratore + denominatore)}$$

$$32 \text{ m} : 8 = 4 \text{ m}$$

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ (numeratore)} = 12 \text{ m (h)}$$

$$4 \text{ m} \times 5 \text{ (denominatore)} = 20 \text{ m (b)}$$

$$12 \text{ m} \times 20 \text{ m} = 240 \text{ m}^2 \text{ (area)}$$

I ragazzi erano in difficoltà, sebbene avessero studiato la regola esposta sopra, che però è mnemonica, e perciò non aiuta a capire e a ragionare. Hanno invece capito facilmente ragionando sulla base del significato dei numeri. **Se l'altezza è 3 quinti della base, la base è 5 quinti, e la loro somma è 8 quinti della base: 8 è la somma dei numeratori 3 e 5 e si riferisce a tutti i quinti della base.** Questi 8 quinti misurano in tutto 32 m, perciò, per calcolare la misura di 1 quinto della base devo fare 32 diviso $8 = 4$, misura di 1 quinto. Per calcolare la misura dell'altezza, che è 3 quinti della base, moltiplico 4, (misura di 1 quinto), per 3 = 12, misura dell'altezza. Per calcolare la misura della base, che è 5 quinti, moltiplico 4 per 5 = 20, misura della base.

Così si capisce facilmente.

È bastato esplicitare che se l'altezza è 3 quinti della base, la base è 5 quinti, in tutto 8 quinti, somma dei 2 numeratori, $3 + 5$, che misurano in tutto 32 m.

Nella regola invece 8 è la somma del numeratore 3 + denominatore 5 della frazione $3/5$, ma non è chiaro che questo 8 indica tutti i quinti della base. Poi si fa ugualmente 32 diviso 8, ma non non si capisce perché, non essendo chiaro, appunto, a cosa si riferisca il numero 8.

E non si capisce neanche perché, per calcolare la misura della base, si moltiplica il risultato 4, per il denominatore 5 di $3/5$, mentre lo si capisce benissimo se moltiplico lo stesso 4, valore di 1 quinto, per il numeratore 5 di 5 quinti, che sono tutti i quinti della base, quantificati appunto dal numeratore di 5 quinti e non dal denominatore di $3/5$.

I numeri sono gli stessi, ma cambia il loro significato.

Perciò i ragazzi, dovendo applicare la regola mnemonicamente, erano in difficoltà perché non potevano fare un ragionamento significativo e non capivano il significato di ben due operazioni.

Gli stessi invece ragionavano bene se capivano il significato dei numeri. Tale significato, perciò, dovrebbe illuminare il più possibile il linguaggio matematico, che, per essere rigoroso, prescinde spesso, giustamente, dal significato stesso, ma rischia così di rendere la matematica “un gioco astratto di simboli formali”, con l'applicazione di regole mnemoniche.

Lo stesso discorso vale per i problemi del quarto tipo, in cui si conosce la differenza tra i valori di due grandezze ed il loro rapporto. Ad es. *La differenza tra la misura della base e quella dell'altezza di un rettangolo è 8 metri, e la base è 3/5 dell'altezza. Calcolare la base e l'altezza.* La regola dice che si divide la differenza data 8, diviso la differenza tra i due termini della frazione, 3/5, che ne esprime il rapporto: cioè $denom. 5 - num. 3 = 2$. Cioè $8 : 2 = 4$. Poi si moltiplica 4 per il numeratore $3 = 12$ (altezza); e lo stesso 4 per il denominatore $5 = 20$ (base). Come nel caso precedente non si capisce perché si devono fare tali operazioni. **Ma basta esplicitare che la differenza, 8 metri, corrisponde a 5 quinti – 3 quinti = 2 quinti della base, per capire facilmente le operazioni da fare, in base al significato dei numeri.**

PROBLEMA DEL TRIANGOLO- (Provare a risolverlo da soli)-

In un triangolo isoscele, l'angolo al vertice è i 2/3 di un angolo alla base. Quanto misura ciascuno dei 3 angoli? (La loro somma è 180°).

SOLUZIONE 1 – Col 3 semplice diretto e riduzione all'unità

Se l'angolo al vertice è i 2 terzi dell'angolo alla base, questo è 3 terzi di se stesso, come l'altro. In tutto perciò sono (3 terzi + 3 terzi + 2 terzi) dell'angolo alla base = 8 terzi dell'angolo alla base, che misurano 180°. Per calcolare quanto misura 1 terzo dell'angolo alla base, col 3 semplice diretto e riduzione all'unità, si divide $180^\circ : 8 = 22,5^\circ = 22^\circ e 30'$. Per calcolare quanto misurano 3 terzi dell'angolo alla base, e cioè 1 intero angolo alla base, si moltiplica $22,5^\circ \times 3 = 67,5^\circ = 67^\circ e 30'$. E per trovare il valore di 2 terzi dell'angolo alla base, cioè l'ampiezza dell'angolo al vertice, si fa $22,5^\circ \times 2 = 45^\circ$.

SOLUZIONE 2 - (Formale, con la seguente equazione, in due versioni)

NOTA - $(2/3)y = 2$ terzi di y . Invece $2/3y = 2$ su $3y$

Formale consueta

Pongo $y =$ angolo alla base.

$$2y + (2/3)y = 180$$

$$(6+2)/3 y = 180$$

$$(8/3)y = 180$$

Formale intuitiva

Pongo $y =$ angolo alla base.

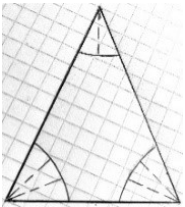
$$y + y + (2/3)y = 180$$

$$(3/3)y + (3/3)y + (2/3)y = 180$$

$$(8/3)y = 180$$

$$y = 180 : 8/3 = 180 \times 3/8 = 180 : 8 \times 3 = 67,5 \text{ (angolo alla base)}$$

$$(2/3)y = 67,5 : 3 \times 2 = 22,5 \times 2 = 45 \text{ (ampiezza dell'angolo al vertice)}$$



Col disegno si capisce bene, ma per fare il disegno bisogna prima aver capito il testo. E per capire i testi è molto utile verbalizzare vari rapporti visualizzati in varie figure.

Ad es. si disegna o costruisce un rettangolo con la base di 5 stecchini e l'altezza di 3 stecchini uguali. Poi si verbalizza: 1 stecchino è 1 quinto della base, l'altezza è 3 quinti della base, la base è 5 quinti; il perimetro è 16 quinti della base.

E ancora: 1 stecchino è 1 terzo dell'altezza; l'altezza è 3 terzi; la base è $5/3$ dell'altezza; il perimetro è 16 terzi dell'altezza, ecc., anche con altri rapporti e varie verbalizzazioni diverse, per una maggiore flessibilità e agilità mentale. Tale attività, anche soltanto orale e a piccole dosi in poco tempo, è molto efficace per capire e consolidare i concetti e il significato delle parole e locuzioni verbali usate per esprimerli, che poi si ritrovano nei testi, di cui sarà allora facile capire il significato ed eventualmente convertirli in disegni.

Ma torniamo al problema. Pochissimi l'hanno risolto oralmente con la soluzione 1. Molti, anche freschi di liceo, non ci sono riusciti, con viva sorpresa, mia ed anche loro, dopo che, con un piccolo aiutino l'hanno capito subito: se l'angolo al vertice è 2 terzi dell'angolo alla base, questo è 3 terzi, ecc. Non c'erano riusciti perché abituati a usare le formule, sia con la frazione-operatore che con l'equazione, in cui non si considera né si scrive mai la frazione apparente che esprime l'intero frazionato, come ad es. $\frac{3}{3x}$, $\frac{8}{8x}$, ecc. perché è sempre $1x$ e quindi x . Non si evidenzia mai, perciò, il numero di parti uguali in cui è diviso l'intero, quantificate dal numeratore della frazione apparente: questa non si esprime mai perché è sempre uguale a 1, e così si eclissa anche nella mente. Ma basta esprimerla, almeno un po', per riportarla alla luce e capire meglio.

Si interiorizza e imprime nella mente, infatti, solo ciò che si fa, si esprime, si scrive e si visualizza. Una volta un alunno, per fare $31 - 27$ senza scriverlo, mi disse che aveva “*messo in colonna a mente*”, e si sbagliò pure. Non aveva interiorizzato le procedure del calcolo mentale, (che non è solo “orale”), perché non le aveva espresse e forse neanche visualizzate, come si può e si deve fare, anche scrivendole, in riga, in vari modi, e visualizzandole con sussidi adatti. (*Molti esempi sono nel libro APPRENDERE E INSEGNARE, Amazon*). Una verbalizzazione chiara e significativa, riferita se necessario a rappresentazioni concrete, fornisce al pensiero un potente faro, e il potente carburante del significato per accendere e alimentare l'attività cognitiva e creativa, come dimostrano molti studi. “*Il linguaggio e il processo di definizione (mediazione verbale), esercitano un'influenza enorme sul processo di soluzione dei problemi.*” (Mussen-Kagan, “*Linguaggio e sviluppo cognitivo*”, Zanichelli '75).

Gli stecchini di Emma Castelnuovo

Nelle pagine precedenti abbiamo visto come una delle cause che ostacolano la comprensione del testo dei problemi, e di conseguenza il ragionamento per poterli risolvere, è l'opacità del linguaggio stesso usato nei testi, che va perciò illuminato con una verbalizzazione più chiara, che ne espliciti meglio il significato, anche con rappresentazioni concrete o disegnate, in cui sia ben visualizzato il significato stesso delle parole e locuzioni. Emma Castelnuovo spiega come un'altra causa della difficoltà a capire e risolvere tali problemi consista nella astrattezza dei testi e del disegno stesso. Evidenzia perciò l'importanza di rappresentare concretamente il problema con materiali e sussidi concreti, come ad esempio gli stecchini. La Castelnuovo riporta la seguente esperienza didattica:

“ Comincio col riferire un'esperienza che ho fatto per molti anni in una prima media. Essa, mettendo in evidenza le difficoltà che incontra un ragazzo nella formazione operativa e concettuale, mi ha indotto a sostituire il disegno con un materiale. Proponiamo ai ragazzi il problema: *disegnare un rettangolo avente la base tripla dell'altezza*.

Ecco come i ragazzi eseguono la costruzione col disegno: alcuni, valendosi del doppio decimetro, fissano una certa lunghezza per l'altezza, la triplicano, e disegnano così la base; altri si valgono del foglio a quadretti per disegnare, per esempio, l'altezza lunga come il lato di un quadretto, e quindi, poi, la base lunga come tre di quei lati; altri ancora disegnano un rettangolo senza prendere le misure, ma mettono in evidenza che la base è tripla dell'altezza dividendo la base in tre parti, che dovrebbero poi essere ciascuna uguale all'altezza, cosa che spesso non si verifica.

Dopo che i bambini hanno effettuato il disegno, si dice: “-Se fosse data la lunghezza del perimetro di quel rettangolo, sarebbe possibile determinare la lunghezza della base e dell'altezza?” Si osserva allora che i bambini danno le risposte più impensate; dicono: “-Si divide il perimetro per 2, per 4, per 3!”.

Si rimane perplessi e si nota che i bambini non osservano affatto il rettangolo che hanno disegnato sul quaderno, e, anche incoraggiati ad esaminare il disegno che hanno tracciato essi stessi, “non lo vedono”. Evidentemente è una costruzione eseguita senza avervi ragionato.

Riflettiamo: osservare quel rettangolo significa scomporre il suo contorno negli elementi che lo formano, significa pensare la base come composta di tre elementi uguali fra loro e uguali all'altezza; occorre dunque che il ragazzo, dopo aver fatto la sintesi degli elementi, cioè la costruzione, ne faccia l'analisi, e, poi, metta in relazione il perimetro con la somma dei segmenti che compongono la figura: si tratta dunque di concepire un'equazione di 1° grado. L'osservazione didattica che possiamo fare è questa: il bambino non osserva il rettangolo, non riesce ad analizzarlo, a vederlo cioè nei suoi elementi, ma solo globalmente come un tutto inscindibile, anche se è stato lui a disegnarlo.

Facciamo ora risolvere lo stesso problema utilizzando un materiale semplicissimo: degli *stecchini*, tutti uguali. Ogni bimbo costruirà il suo rettangolo utilizzando uno stecchino per l'altezza e tre stecchini per la base. Dopo aver costruito questo rettangolo, non c'è bambino che, assegnato un valore per il perimetro, non sappia dire immediatamente quale procedimento deve seguire per trovare le lunghezze delle due dimensioni.

Che cosa c'è di diverso in questa costruzione dalla costruzione col disegno? Qui, il bambino si rende conto, nell'effettuare la costruzione, della relazione della parte al tutto, dello stecchino rispetto a tre stecchini; e vi dirà subito:

“-Occorre contare il numero degli stecchini”.

Si passa dall'elemento alla sintesi degli elementi: il metodo è sintetico, all'inizio. Poi si assegna un dato, la lunghezza del perimetro, e si chiede la lunghezza ipotetica dell'elemento. Si ritorna indietro, si scompone; ora, davanti alla effettiva costruzione, il bimbo riesce ad analizzare la figura.

(Emma Castelnuovo, Didattica della matematica.)

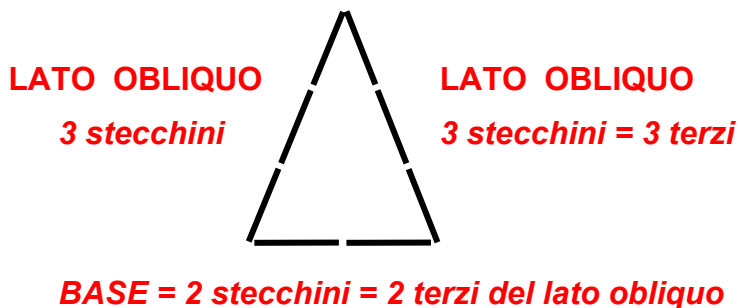
In una quarta elementare gli alunni non riuscivano a capire il testo del seguente problema: *Un triangolo isoscele ha la base che è la metà del lato obliquo. Il suo perimetro misura 50 metri. Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?* L'hanno poi costruito con gli stecchini, risolvendolo facilmente.

Vediamo un altro esempio.

*Un triangolo isoscele ha la **base che è i 2/3 del lato obliquo.***

Il perimetro misura 80 m. Quanto misurano i lati obliqui e la base?

Costruendo il triangolo con gli stecchini si intuiscono facilmente le operazioni da compiere per risolverlo. *(Si veda a pag. 312: Scatola con stecchini)*



Emma Castelnuovo osserva: *“E lo stecchino, questo materiale da nulla, assume per il bimbo un valore enorme: è il mezzo per risolvere dei problemi costruendo e contando, operazioni, queste, che impongono di non verbalizzare.”*

Ma attenzione! Non è vero che esse “impongono” di non verbalizzare: semplicemente *“non lo richiedono.”* La difficoltà a capire il testo dipende invece spesso proprio dal fatto che non si cura la verbalizzazione appropriata piena di significato delle rappresentazioni fatte con gli stecchini o altro, o col disegno. La quale invece può aiutare molto a capire i testi e ad orientare il pensiero, come afferma la stessa Castelnuovo già citata:

“Ci si chiede se non sia proprio l’espressione “m-ennesimi” che fa perdere di vista il valore relativo della frazione; se, insomma non sia proprio il linguaggio, troppo raffinato e sintetico, a nascondere il vero significato della frazione. Si tratta di una questione di semplice linguaggio, ma spesso è proprio il linguaggio a indirizzare il pensiero.”

Mica tanto *“semplice linguaggio”!* Perché è proprio il linguaggio che veicola i significati, i quali sono il carburante del pensiero. Se non si verbalizza correttamente si priva il pensiero di un mezzo importantissimo. Mi pare che si corra questo rischio anche con il *“metodo analogico”* in cui i problemi sono rappresentati col disegno, e sono perciò facili da capire e risolvere “a volo”, ma se si trascura la verbalizzazione sarà poi più difficile comprendere i testi verbali. Verbalizzare, invece, anche solo oralmente, ma con un linguaggio appropriato e codificato, le rappresentazioni disegnate o fatte con stecchini o altro, capendone bene il significato in esse visualizzato, è il modo più semplice ed efficace per capire poi i testi verbali, in cui si ritrovano le stesse parole e locuzioni, ed eventualmente rappresentarli, col disegno o altro, risolvendo facilmente i problemi.

Rappresentare, capire, verbalizzare

La verbalizzazione appropriata e significativa, anche solo orale, con cui si esprimono i concetti e i significati rappresentati con il disegno o i sussidi riveste una grande importanza. Grazie ad essa l'alunno sarà poi in grado di fare anche l'inverso, e cioè comprendere il significato dei testi verbali, e tradurli, se necessario, in disegni o rappresentazioni concrete, che D'Amore considera "*l'anticamera logica della soluzione*", poiché visualizzano il significato dei problemi che è alla base del ragionamento.

I sussidi e le rappresentazioni concrete o figurate sono molto importanti, ma non devono far trascurare il linguaggio verbale e i simboli matematici. Ne devono invece costituire un potente trampolino di lancio, riempiendo di significato le parole e i simboli stessi, come un prezioso carburante che alimenta il pensiero.

E i linguaggi verbale e simbolico saranno tanto più pieni di significato quanto più si saranno curate la verbalizzazione e la simbolizzazione riferite alle rappresentazioni concrete, in "presa diretta" con il pensiero, come peraltro avviene nella vita reale, quando si verbalizzano le esperienze, i fatti e tutte le cose con parole piene di significato.

Spesso invece si salta tale fase di "*carica semantica*", e ci si limita a lavorare, in modo anche interessante, sui testi verbali, restando però in un ambito verbale astratto, o si illustrano o rappresentano concreta-mente i testi stessi con alcuni esempi, andando dall'astratto al concreto.

Ma non si fa un lavoro più mirato ed efficace di verbalizzazione, anche solo orale, delle rappresentazioni e operazioni concrete, andando dal concreto all'astratto, in presa diretta tra pensiero, linguaggio, simboli e significati visualizzati nelle rappresentazioni concrete stesse.

Questo ritengo invece che sia il modo più efficace per assicurare l'acquisizione di un linguaggio verbale pieno di significato, e quindi la comprensione dei testi verbali e dei simboli del linguaggio matematico codificato, evitando il vuoto verbalismo, del quale la verbalizzazione significativa riferita al concreto ed al vissuto, è il miglior antidoto: aumentando questa diminuisce quello.

Ad esempio, come abbiamo già visto, il concetto di rapporto e i problemi con lo stesso risultano difficili perché sono estranei all'esperienza ed al linguaggio ordinario degli alunni, che non capiscono il significato delle parole e del testo, come avviene anche per altri problemi e argomenti. A ciò si può ovviare, non solo e non tanto "spiegando" con qualche esempio concreto, ma facendo costruire, vedere, capire e verbalizzare in modo appropriato vari rapporti. In tal modo il concetto di rapporto e le relative rappresentazioni concrete o figurate, con le verbalizzazioni e scritture simboliche, diventano familiari agli alunni, che così afferrano facilmente il significato delle parole e dei simboli, e diventano capaci di comprendere facilmente i testi verbali e tradurli, se necessario, in rappresentazioni chiare, e ragionare consapevolmente per risolvere i problemi.

Anche Bortolato, nel suo “*metodo analogico*”, usa le rappresentazioni concrete o figurate, per rappresentare i problemi. E grazie ad esse gli alunni capiscono “a volo” la soluzione, come avviene in parte, con le ovvie differenze, anche con il metodo usato per i sordomuti. Ma se non si fa anche verbalizzare in modo appropriato, conforme al linguaggio matematico codificato, gli alunni possono poi trovare difficoltà nella comprensione dei testi verbali. La quale invece è molto facilitata se si verbalizzano le rappresentazioni figurate o concrete e il procedimento risolutivo, con parole e locuzioni appropriate, che in tal modo si caricano di significato, e che poi, quando si ritrovano nei testi, vengono comprese anche senza riferimenti concreti, in un progressivo ed importante processo di astrazione ed uso significativo dei simboli astratti e del linguaggio verbale matematico.

Oltre alla verbalizzazione è importante cercare anche di capire ed esplicitare, gradualmente, ma senza pedanteria pignolesca, i vari passaggi del ragionamento che hanno portato alla soluzione, altrimenti c’è il rischio di restare legati ad una eccessiva immediatezza intuitiva globalistica e generica, che può inceppare un ragionamento logico più chiaro, consapevole ed articolato, e la sua verbalizzazione appropriata, fondamentale per la formazione dei concetti e del pensiero logico ed argomentativo.

Nel seguente rettangolo, costruito con stecchini o disegnato, è visualizzato il rapporto tra le sue dimensioni, che **si può verbalizzare** in vari modi.



ALTEZZA = 3 quinti della BASE

BASE = 5 quinti

SEMIPERIMETRO = BASE + ALTEZZA = 8 quinti della base



ALTEZZA = 3 terzi

BASE = 5 terzi dell' ALTEZZA

SEMIPERIMETRO = BASE + ALTEZZA = 8 terzi dell'ALTEZZA

*L'ALTEZZA è $\frac{3}{5}$ della BASE, che è $\frac{5}{5}$;
il PERIMETRO è $\frac{16}{5}$ della base;
il SEMIPERIMETRO (base + altezza) è $\frac{8}{5}$ della base.*

*La BASE è $\frac{5}{3}$ dell'ALTEZZA, che è $\frac{3}{3}$;
il PERIMETRO è $\frac{16}{3}$ dell'ALTEZZA;
il SEMIPERIMETRO (base + altezza) è $\frac{8}{3}$ dell'ALTEZZA.*

Tale esercizio, guidato dall'insegnante finché necessario, va ripetuto anche con altre figure ed altri rapporti, in vari modi, anche più semplici e concreti, ed anche solo oralmente, per consolidare il concetto di rapporto, con diverse verbalizzazioni, che renderà poi facile capire il testo dei problemi con i rapporti, e risolverli. Ad es. costruisco il rettangolo con gli stecchini, poi faccio verbalizzare:

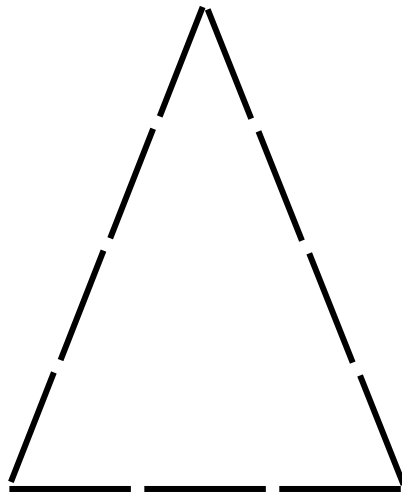
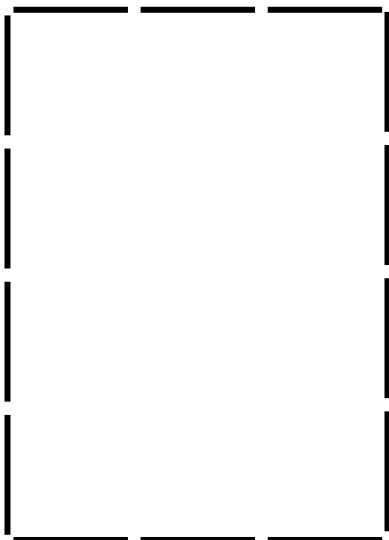
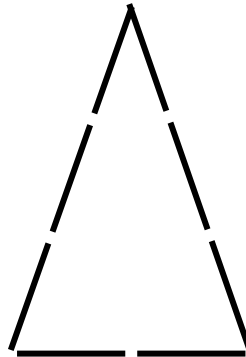
La BASE è 5 stecchini, cioè 5 quinti. Uno stecchino è 1 quinto della BASE. L'ALTEZZA è 3 stecchini, cioè 3 quinti della BASE. BASE più ALTEZZA (SEMIPERIMETRO), è 5 stecchini + 3 stecchini = 8 stecchini, cioè 8 quinti della BASE.

Lo stesso posso fare partendo dall'altezza di 3 terzi e in altri modi. Verbalizzare la stessa rappresentazione in vari modi aiuta a capire meglio e consolidare i concetti.

Ci sono alunni che capiscono più rapidamente lavorando anche a un livello più astratto, solo col disegno ed anche senza, con parole e simboli. L'importante è che capiscano e consolidino bene il significato sia delle parole che dei simboli.

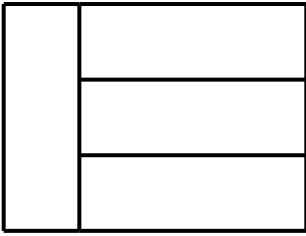
Verbalizzare i rapporti

Verbalizzare i rapporti diretti e inversi tra la **base e l'altezza** dei 2 rettangoli e tra la **base e il lato obliquo** dei 2 triangoli isosceli, come nella pagina precedente.

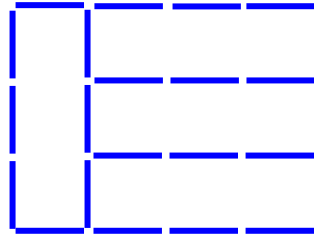


PROBLEMA - La scatola disegnata ha 4 scomparti uguali.

Il suo perimetro è 70 cm. Calcolarne l'area.



Scatola disegnata



Costruita con stecchini uguali

Costruendo la scatola con degli stecchini uguali la soluzione è molto più facile. Si vede infatti che il **lato grande** dello scomparto verticale coincide con **3 latini piccoli** dei 3 scomparti orizzontali e con l'**altezza** (lato minore) della scatola; perciò la sua **base** (lato maggiore) corrisponde a **4 latini piccoli**.

E il **perimetro** a $4 + 3 + 4 + 3 = 14$ **latini piccoli** degli scomparti.

Con il linguaggio matematico.

L'**altezza** della scatola è $\frac{3}{4}$ della **base**, che è $\frac{4}{4}$, e la loro somma è $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ **della base**.

E viceversa la **base** è $\frac{4}{3}$ dell'**altezza**, che è $\frac{3}{3}$, e la loro somma è $\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ **dell'altezza**.

Il perimetro è $\frac{14}{3}$ dell'altezza o $\frac{14}{4}$ della base.

Dividendo il **perimetro, 70 cm, diviso in 14 parti uguali**, si ottiene **5 cm**, che è la misura di un **latino piccolo** degli scomparti. Ecc...

70 cm : 14 = 5 cm (misura latino piccolo scomparti)

5 cm x 3 = 15 cm (altezza: lato minore della scatola)

5 cm x 4 = 20 cm (base: lato maggiore della scatola)

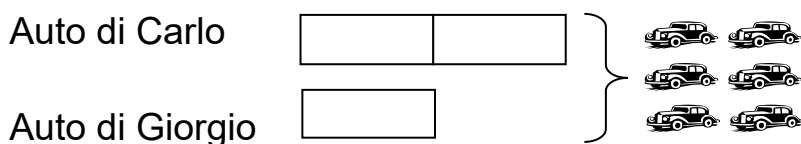
20 cm² x 15 = 300 cm² (area della scatola)

Gradualità e livelli di astrazione

Fondamentale è la gradualità nelle difficoltà da affrontare. I problemi con la *somma e il rapporto* di 2 grandezze, ad es., possono essere anche semplicissimi, come il seguente:

Problema -Giorgio dice a Carlo: -Io ho la **metà** delle tue automobili; se le mettiamo **insieme** abbiamo in tutto 6 automobili. *Quante automobili ha Carlo? E quante Giorgio?*

La soluzione è intuitiva, con la manipolazione o il disegno.



Secondo livello: secondaria di primo grado

Lo stesso problema, con gli stessi dati, può essere formulato in modo molto più astratto:

Problema - Trovare 2 numeri sapendo che la loro **somma è 6** e che uno è la **metà** dell'altro.

Si può visualizzare il problema anche con 2 segmenti.

Uno dei 2 numeri è diviso in 2 *mezzi* e l'altro è 1 *mezzo del primo*.

In tutto sono 2 *mezzi* + 1 *mezzo* = 3 *mezzi* = 6.

Per trovare 1 *mezzo* faccio 6 diviso 3 = 2 (valore di 1 *mezzo*)

Poi moltiplico 2 per 2 = 4 che è il valore di 2 *mezzi*.

Terzo livello: secondaria di secondo grado.

Si può formulare lo stesso problema a livello ancora più astratto e generale :

Problema - *Trovare 2 numeri conoscendo la loro somma S e sapendo che uno è la metà dell'altro.*

Basta impostare e risolvere il semplicissimo sistema di equazioni

$$\begin{cases} z + y = S \\ z = 1/2 y \end{cases}$$

SUSSIDI DIDATTICI

TRAMPOLINO DI LANCIO PER L'ASTRAZIONE

Un'insegnante una volta mi disse che preferiva far usare meno possibile agli alunni i sussidi concreti perché altrimenti essi ne avevano **sempre bisogno**, e trovavano **difficoltà ad astrarre** i concetti.

Rimasi molto **sorpreso**, poi pensai che quell'insegnante **usava male i sussidi concreti**, **trascurando di far esprimere verbalmente con linguaggi verbale e simbolico i concetti rappresentati con i sussidi**, con un **graduale processo di astrazione**.

I sussidi concreti, infatti, **se usati bene**, sono un un potente **trampolino di lancio** verso l'astrazione, per far **capire meglio i concetti** ed esprimerli con i **linguaggi** ed i **simboli astratti**, evitando il **verbalismo** vuoto e l'apprendimento **mnemonico**. I quali spesso dipendono proprio dal **mancato uso di sussidi** concreti adeguati, pensando che bastino le spiegazioni verbali, magari accompagnate da qualche disegno: così facendo, però, si rischia di mettere il **carro davanti ai buoi**.

I sussidi concreti, perciò, non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e l'uso dei **simboli astratti**. Anzi, devono essere il loro **trampolino di lancio, grazie alla verbalizzazione piena di significato, una sorta di "carica semantica"**. I linguaggi verbale e simbolico, infatti, saranno tanto più pieni di significato quanto più si sarà curata adeguatamente la **verbalizzazione** riferita all'esperienza concreta, in "**presa diretta**" con il **pensiero**. E grazie a ciò diminuirà sempre più anche la necessità di sussidi ed esempi concreti, pur sempre importanti, per capire, ragionare e risolvere problemi, in cui riveste un ruolo fondamentale la **comprensione semantica** delle **parole** e del **testo**, come dimostrano molte ricerche.

Mussen-Conger-Kagan, nel libro *“Linguaggio e sviluppo cognitivo”*, affermano:

*“Dagli scritti di **Piaget** si può di tanto in tanto dedurre implicitamente che il bambino di **5 anni** è **incapace** di serializzare in qualsiasi dimensione, e nessun bambino di **7 anni** è capace di ragionare su qualsiasi argomento **senza oggetti concreti**.”*

Queste affermazioni categoriche sono ancora **controverse**. La maggior parte dei bambini di **5 anni** sostiene che **il proprio padre** è più grande di **un coniglio**, e che un coniglio è più grande di **un topo**, e si rende conto che **il proprio padre** è più grande di **un topo**, rivelando così una capacità di **ordinare** gli oggetti secondo una dimensione di grandezza.

La differenza tra questo problema e quelli utilizzati da Piaget consiste nel fatto che il problema del **padre** e del **coniglio** si riferisce a **nozioni molto familiari**. **Se non capisce la domanda che gli viene fatta, il bambino agirà ovviamente a un livello immaturo.**

Piaget sostiene ad es. che il bambino di **8 anni** non riesce a **classificare** se stesso in **2 dimensioni contemporaneamente**, cioè non riesce a considerarsi nello stesso tempo membro di **una città** ed anche di **un paese**. **Uno dei motivi di questa carenza dipende dal fatto che il bambino non comprende completamente il significato semantico delle parole città e paese: non sa che una città fa parte di una nazione. Si può dimostrare che il bambino di 5 anni è capace di doppie classificazioni quando comprende i 2 concetti.**

Il bambino di **5 anni** sa di far parte della famiglia **Rossi** e, nello stesso tempo, del sesso **maschile**.

Mussen-Conger-Kagan concludono:

*“I passi avanti compiuti sulla via del **linguaggio** aprono la strada ai progressi nell’ apprendimento complesso, nella formazione dei concetti, nel **pensiero**, nel ragionamento e nella soluzione dei problemi. Queste **attività cognitive** ad alto livello vengono considerevolmente accentuate dalla **mediazione verbale**. Il **linguaggio** e il processo di definizione (mediazione verbale), esercitano **un’influenza enorme** sul processo di soluzione dei problemi ecc....”*

Guido Petter fa il seguente esempio:

*“A **Torino** vive circa un **milione di persone**. Sulla testa di una persona non crescono più di **300.000 capelli**.*

*E’ possibile affermare che a Torino ci sono sicuramente **2 persone** con lo stesso numero di capelli?”.*

La soluzione è molto più facile se il problema, con la stessa struttura logica, contiene però dati più intuitivi. Ad esempio:

*“Sappiamo che **i mesi dell’anno sono 12**. In una certa classe di una scuola ci sono **13 bambini**. E’ possibile dire che in quella classe ci sono certamente **2 bambini** nati nello stesso mese ?”. (G. Petter, “Psicologia e scuola primaria”)*

Keith Devlin scrive:

“Se trovavano un prodotto che costava **4 dollari** per un pacco da **3 etti** e un pacco più grande di **6 etti per 7 dollari** molti acquirenti confrontavano in realtà **i rapporti $4/3$ e $7/6$** per vedere qual era il maggiore. Per cui i ricercatori avevano inserito nel test la domanda: **“Qual è maggiore tra $4/3$ e $7/6$?”** Ma la stessa acquirente che se l’era **cavata benissimo** al supermercato, nel **test sbagliava**. Ecc...

I bambini (venditori di noci di cocco) erano sempre **precisi quando sedevano dietro la loro bancarella**, ma si dimostravano veri e propri **asini** quando veniva loro proposto lo **stesso identico problema aritmetico, espresso però in una tipica formulazione scolastica**.

I ricercatori ne rimasero così impressionati e incuriositi che coniarono un nome apposta per tutto ciò: **matematica di strada**. Ecc...(Impressionati da un fatto così **ovvio**? Un po’ **tonti!** (Nota dello scrivente) Poiché, sia i bambini di Recife sia gli alunni di Herndon avevano dimostrato di essere capaci di **operare tranquillamente con l’aritmetica in alcuni contesti a loro familiari**, quando **i numeri avevano per loro un significato**, sembra chiaro che **il significato, o il senso pratico immediato, ha un ruolo fondamentale** nella nostra capacità di fare dell’aritmetica.”

(Keith Devlin, “L’istinto matematico”)

La linfa della comprensione alimenta il pensiero.

Se non si capisce il significato del linguaggio e dei simboli si **atrofizza** la matematica, privandola della **linfa vitale** della **comprensione** dei concetti, che riempie di significato le scritte simboliche e fonda gli **algoritmi** di calcolo e il **ragionamento** nella soluzione dei problemi, in modo anche originale.

Ma il rigore degli algoritmi porta a prescindere dal significato, che invece è fondamentale per poter capire e ragionare.

René Thom, medaglia Field '58, (il “*nobel*” della matematica) osserva: *“Si accede al **rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra **rigore e significato**, scelgo quest'ultimo senza esitare**”* (G. Ottaviani, “*La teoria degli insiemi...*”, su internet).

Nel libro di **Keith Devlin**, “**L'istinto matematico**”, si costata come i **venditori** di noci di cocco e gli **acquirenti** del supermercato se la cavano benissimo con la **“matematica di strada”, “naturale” e piena di significato**, con calcoli e problemi pratici e significativi, collegati con l'esperienza ed il vissuto, mentre **falliscono con la “matematica scolastica”, perché astratta..**

Devlin osserva: *“Il problema che molte persone hanno con la **matematica scolastica** è che non sono mai arrivate a comprenderne il significato: rimane per sempre **un gioco astratto di simboli formali.**”*

E allora bisogna cercare di **“gettare un ponte”**, come dice **Hans Freudenthal**, tra la **“matematica naturale” intuitiva**, e quella **“scolastica”, formale**, con una **didattica laboratoriale** e un approccio **“sostanziale-significativo”**, per capire meglio anche quello **“formale.”** (*Pellerey, “Progetto RICME”, I*).

Tale criterio è tanto più importante quanto più i simboli matematici sono **astratti**, come quelli delle **frazioni**, in cui ovviamente aumenta il **rischio** di **formalismo** astratto e mnemonico.

Mente linguaggio apprendimento

L'importanza delle conoscenze ben organizzate e strutturate è stata evidenziata dalle teorie degli “*script*”, “*frame*”, “*schemi*”, presentate da Dario Corno e Graziella Pozzo nel libro “*Mente, linguaggio, apprendimento*”, in cui si afferma: “*Pare che la maggior parte delle nostre capacità di ragionamento sia legata a schemi particolari di particolari ambiti di conoscenza.*”

Tale conclusione è suggerita da alcuni **esperimenti**, tra cui quello di Laird e D'Andrade, in cui è stato proposto a uno stesso campione di persone 2 problemi di **implicazione logica**, (“*se..... allora*”), con la **stessa struttura** logica, ma dal contenuto **estraneo**, nel primo, e molto più **familiare** nel secondo, riscontrando una percentuale di **successi 5 volte superiore** nella soluzione del secondo problema.

D. Corno e G. Pozzo osservano: “*Il primo caso non è familiare, e i soggetti, non possedendo gli schemi entro cui riportare il problema, possono solo attivare strategie di soluzione di problemi molto generali. Il secondo caso è più vicino a situazioni “reali” di soluzione di problemi. Una volta “capita” la situazione, in quanto codificata in termini di un insieme relativamente ricco di schemi, si possono introdurre i vincoli concettuali degli schemi per risolvere il problema. E’ come se lo schema contenesse già tutti i meccanismi di ragionamento comunemente richiesti nell’uso degli schemi. Capire il problema e risolverlo sono perciò quasi la stessa cosa.*”

I **2 problemi** usati nel suddetto esperimento sono gli stessi citati nell'articolo "*Insegnamento muro e ponte*", su L'Educatore, n° 1, a.s. 2008/'09, in cui Mario **Castoldi** scrive:

*"Nel suo bel libro sulla valutazione degli apprendimenti, **Maurizio Lichtner** presenta, tra gli altri, questi 2 esempi per dimostrare quanto sia diverso l'apprendimento scolastico, fondato su un **ordine logico**, dall' apprendimento in situazioni di realtà, fondato su un **ordine pratico**.*

1-Hai le seguenti **4 carte**. Devi verificare il rispetto della seguente regola: "Se su un lato c'è una **vocale**, sull'altro deve esserci un **numero dispari**", voltando il minor numero di carte.

Quali carte volteresti ?

E

M

7

4

2 -E' sera, al grande magazzino l'addetto controlla le operazioni della giornata. In particolare deve verificare che, in caso di acquisto superiore a 30 \$, il tagliando deve essere stato firmato sul retro dal responsabile. Quali tagliandi deve voltare per verificarlo?

40 \$

25 \$

Ugo Re

.....

Le 2 situazioni sono basate entrambe su *un'implicazione logica*, e in entrambe si devono voltare la **prima** e l'**ultima** carta o scheda.

Ma il secondo problema è più facile perché è **più intuitivo**. Infatti:

Se **vocale** (E) allora **dispari**; perciò se **non dispari** (4) allora **non vocale**.

Se **più di 30 \$** (40 \$) allora **firma**; perciò se **non firma** allora **non più di 30 \$**.

Implicazione logica non reversibile

La soluzione dei due problemi precedenti si fonda su di un'implicazione logica, che è spesso presente anche nella logica del linguaggio ordinario. Ad esempio

Se piove allora ci sono le nuvole; perciò, se non ci sono le nuvole allora non piove. Ma non viceversa.

Condizione *necessaria ma non sufficiente* perché piova è che ci siano le nuvole.

*Se PIOVE allora ci sono NUVOLE
se NON ci sono NUVOLE allora NON PIOVE*

**Se stai a Roma allora stai in Italia,
perciò, se non stai in Italia allora non stai a Roma.**

**Se è festa allora non c'è scuola,
perciò se c'è scuola allora non è festa.**

**Se cane allora animale, perciò, se non animale allora non cane.
Tutti i cani sono animali, ma non tutti gli animali sono cani.**

**Se Ugo allora maschio, perciò, se non maschio allora non Ugo.
Tutti gli Ugo sono maschi, ma non tutti i maschi sono Ugo.**

Doppia implicazione o coimplicazione logica, reversibile.

La coimplicazione logica già vista non va confusa con la *doppia implicazione o coimplicazione logica* che è reversibile.

Se e solo se respiri allora sei vivo, e viceversa.

Condizione *necessaria e sufficiente* perché tu sia **vivo** è che **respiri**.

Se e solo se RESPIRI \longleftrightarrow allora SEI VIVO

Se e solo se NON RESPIRI \longleftrightarrow allora NON SEI VIVO

Se e solo se tu sei mia madre allora io sono tuo figlio e viceversa. Perciò se tu non sei mia madre allora io non sono tuo figlio e viceversa.

Se e solo se oggi è giovedì allora domani è venerdì e viceversa.

Perciò se oggi non è giovedì allora domani non è venerdì e viceversa.

In uno dei due problemi e negli esempi fatti la comprensione della implicazione e coimplicazione logica è molto facilitata dalla familiarità ed intuitività dei contenuti, appartenenti all'esperienza ordinaria.

Mario **Castoldi**, nell'articolo citato con l'esempio dei 2 problemi, cita **Comoglio** che parla di un insegnamento "*ponte*", un insegnamento **significativo**, con cui si cerca di collegare la conoscenza con la realtà e l'esperienza, e di un insegnamento "*muro*", che invece rende **inerte** la conoscenza. Come afferma **Perkins**: "*La conoscenza inerte si trova in un attico della mente. Si scioglie solo quando in modo specifico è richiamata da un quiz o da una sollecitazione diretta.*"

E come dice **Philippe Perrenoud**, "*La conoscenza non deve essere materia inerte, incapsulata all'interno delle discipline scolastiche, bensì materia viva, da mettere in relazione con le esperienze di vita e i problemi che la realtà pone.*"

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Emma Castelnuovo, *“Didattica della matematica”*, La Nuova Italia
- E. Valenti, *“La matematica nella nuova scuola elementare”*, Le Monnier
- D.Corno-G. Pozzo, *“Mente, linguaggio, apprendimento”*, La Nuova Italia
- Mussen-Conger-Kagan, *“Linguaggio e sviluppo cognitivo”*, Feltrinelli
- Guido Petter, *“Psicologia e scuola primaria”*, Giunti
- Mosconi-D'urso, *“La soluzione dei problemi”*, Giunti-Barbera '73
- Keith Devlin, *L'istinto matematico*, Raffaello Cortina '07
- Hans Freudenthal, *“Ripensando l'educazione matematica”*, La Scuola '94
- M. Castoldi, *“Insegnamento **muro e ponte**”*, L'Educatore, n° 1, '08/'09